

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

ZAMP

Journal of Applied Mathematics and Physics  
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Niggli P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi H. Ziegler  
Redactor: R. Sängier

## INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

RUTISHAUSER, H., SPEISER, A., und STIEFEL, E.: Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen) (I. Teil) . . . . .	277
DÄTWYLER, G.: Beiträge zur Hitzdrahtmethode . . . . .	298
FAVRE, H., et CHABLOZ, E.: Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable	317

### *Varia - Miscellaneous - Divers*

Bericht über die Internationale Tagung für Halbleiterphysik in Reading vom 10. bis 15. Juli 1950 . .	333
Die programmgesteuerte elektromechanische Rechenmaschine der ETH. . . . .	334
Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques . . . . .	335

ZAMP

Vol. I

Fasc. 5

Pag. 277-338

15. 9. 50

Verlag Birkhäuser, Basel / Schweiz

AI  
37

# Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängcr, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmäßig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* in der Originalsprache eine kurze Zusammenfassung beigegeben werden, damit diese durch die Redaktion in eine andere der vier genannten Sprachen übersetzt werden kann. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratis-separata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical must be addressed to the editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors forego proof-reading. The contributions will be published in German, English, French or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* must be added a brief summary in the original language for translation into one of the four languages by the editor. Drawings and photographs for *illustrations* must be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; writings on the illustrations must be done with pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers* and *Brief Reports* receive 50 free copies of separate prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en langue originale qui sera traduit par la rédaction dans une des quatre langues prévues. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 28.—, Ausland Fr. 34.—, Einzelnummer Fr. 6.—

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 28.—, foreign Fr. 34.—, single copy Fr. 6.—

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 28.—, étranger Fr. 34.—, le numéro Fr. 6.—

ZAMP kann in folgenden Ländern bei der Post abonniert werden:

ZAMP can be subscribed directly through any Post Office in the following countries:

ZAMP peut être abonné directement aux offices postales dans les pays suivants:

Belgien-Luxemburg	Dänemark	Schweden	Portugal	Italien
Holland	Norwegen	Finnland	Marokko	Deutschland

Inserate/Advertisements/Annonces:  $\frac{1}{4}$  Seite/page: Fr. 150.—,  $\frac{1}{8}$  Seite/page: Fr. 80.—,  $\frac{1}{16}$  Seite/page: Fr. 45.—

Alle Rechte, einschließlich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés

Copyright 1950 by Verlag Birkhäuser AG., Basel 10 (Switzerland)

Printed in Switzerland



# Programmgesteuerte digitale Rechengeräte (elektronische Rechenmaschinen)

Zusammenfassender Bericht (I. Teil)

Von HEINZ RUTISHAUSER, AMBROS SPEISER und EDUARD STIEFEL<sup>1)</sup>

## Inhaltsverzeichnis

§ 1. Grundlagen und wissenschaftliche Bedeutung . . . . .	278
1.1 Digitale Maschinen und Analogiegeräte	
1.2 Die Programmsteuerung	
1.3 Rechengeschwindigkeit	
1.4 Beziehungen zur Logik	
1.5 Rechenautomaten und Nervensystem	
1.6 Geschichtliches	
1.7 Anwendungen	
§ 2. Organisation und Arbeitsweise . . . . .	287
2.1 Prinzipschema	
2.2 Hauptteile eines Rechenautomaten	
2.3 Befehlsgebung	
§ 3. Arithmetische Prinzipien . . . . .	340
3.1 Zahlssysteme	
3.2 Duale Verschlüsselung	
3.3 Darstellung der Zahlen in der Maschine	
3.4 Rechnen mit halblogarithmisch dargestellten Zahlen	
3.5 Rechnen mit Maschinen mit festem Komma	
3.6 Aufrunden	
3.7 Übersetzung vom Dezimal- ins Dualsystem	
§ 4. Vorbereitung von Rechenplänen . . . . .	*)
4.1 Allgemeiner Gang der Vorbereitung	
4.2 Struktur eines numerischen Problems	
4.3 Die Sprungbefehle	
4.4 Das Strukturdiagramm	
4.5 Verschiedene Arten der Befehlsgebung	
4.6 Rechnen mit Befehlen	
4.7 Beispiel einer Befehlsreihe	
4.8 Behandlung der Funktionen	
4.9 Rechenkontrollen	
§ 5. Physikalische Grundlagen	
5.1 Logische Grundschaltungen	
5.2 Das Rechenwerk	
5.3 Der Speicher	
5.4 Das Leitwerk	
5.5 Eingang und Ausgang	

<sup>1)</sup> Institut für angewandte Mathematik der ETH.

\*) Vol. II, 1951.

## § 1. Grundlagen und wissenschaftliche Bedeutung

1.1. Der vorliegende Bericht soll eine zusammenfassende Darstellung der Erfahrungen geben, die von den drei Verfassern während ihrer Studienaufenthalte in den angelsächsischen Ländern und in Deutschland 1948/49 gesammelt wurden; er ist ferner als Versuch zu werten, durch Schilderung der Leistungsfähigkeit der großen Maschinen und der mathematisch-technischen Grundlagen für ihre Bedienung einen weiteren Kreis von Lesern in das Arbeiten mit derartigen Geräten einzuführen. Da nämlich in vielen Instituten für numerische Mathematik programmgesteuerte Maschinen im Bau oder schon vollendet sind, kann jeder in den Anwendungsgebieten der Mathematik tätige Wissenschaftler in die Lage kommen, die maschinelle Hilfe eines solchen Instituts suchen zu müssen. Es ist dann gut, wenn er — um einen Ausdruck von D. R. HARTREE ([39]<sup>1</sup>), Lecture 5) zu brauchen — «the Machine's-eye view» kennt, das heißt imstande ist, sein Problem so zu sehen, wie die Maschine es tut, wenn sie auf Grund der ihr gegebenen Instruktionen zu laufen beginnt und ohne menschlichen Eingriff bis zur Lösung des Problems weiterlaufen soll.

Um zur Definition unseres Gegenstandes überzugehen, müssen wir zunächst einige Worte über den Unterschied zwischen *digitalen Maschinen* und *Analogiegeräten* sagen. Der numerische Wert «zehn» kann entweder dargestellt werden durch das Zeichen 10 als Ziffernfolge des Dezimalsystems (aber auch in einem andern Zahlssystem, z. B. als LOL0 im Dualsystem), oder dann durch eine physikalische Größe (Länge, Stromstärke usw.), die das Zehnfache ihrer Grundeinheit beträgt. Wir befassen uns ausschließlich mit Geräten, welche die erste Darstellungsart benutzen, also digital, das heißt mit Ziffern rechnen. Die einfachste Realisierung sind Bürorechenmaschinen<sup>2</sup>). Demgegenüber benutzen Analogiegeräte, wie der Rechenschieber, Integrieranlagen, elektrische Netzwerke, die zweite, physikalische Art der Darstellung. Resultate erscheinen bei ihnen als Zeigerstellung auf einer Skala oder direkt als gezeichnete oder projizierte Kurven, die einen Funktionsverlauf graphisch darstellen. Sie heißen Analogiegeräte, weil sie ein Problem lösen mit Hilfe von physikalischen Vorgängen, die auf denselben mathematischen Formeln und Gleichungen beruhen wie das Problem selbst, diesem also mathematisch analog sind. Hervorzuheben ist, daß diese beiden Gerätesorten sich nicht konkurrenzieren, sondern sich gegenseitig ergänzen sollen. Man kann zum Beispiel lineare Gleichungen auflösen, indem man abwechselnd Näherungswerte mit Hilfe der digitalen Maschine in die Gleichungen einsetzt und diese dann durch ein Analogiegerät verbessert.

Eine Bürorechenmaschine kann addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Auch die Maschinen, über die wir berichten — wir nennen sie auch

<sup>1</sup>) Die Zahlen in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis auf S. 295.

<sup>2</sup>) Man erlaube uns, dieses Wort an Stelle der klareren englischen Bezeichnung «desk calculator» zu verwenden; wir meinen damit im ganzen Artikel die handelsüblichen — handgetriebenen oder vollautomatischen — Rechenmaschinen vom Typus *Madas*, *Monroe* usw.



*Rechenautomaten* —, sind hinsichtlich ihrer arithmetischen Fähigkeiten genau gleichgestellt; *auch sie können nur die vier Grundoperationen ausführen*. Jedoch sollen sie — und dies ist entscheidender Unterschied und wesentlicher Fortschritt — *programmgesteuert* sein; es soll also möglich sein, eine längere Kette von solchen Grundoperationen nach einem *Rechenplan* vollautomatisch abzuwickeln. Dies bedingt sofort folgende weitere Organe in der Maschine: erstens muß ein *Zahlenspeicher* vorhanden sein, in welchem gegebene Zahlen der Rechnung und Zwischenresultate aufgespeichert werden können; sodann müssen durch ein *Leitwerk* die einzelnen Rechenoperationen sowie die Transfere vom Speicher ins Rechenwerk und umgekehrt ausgelöst werden.

1.2. Bei den Lochkartenmaschinen vom Typus Hollerith wird der Rechenplan vor Beginn der Rechnung in die Maschine gegeben, indem man auf einem Schaltbrett elektrische Verbindungen herstellt. Meistens jedoch erlaubt die Struktur komplizierterer mathematischer Probleme diese etwas starre Arbeitsweise nicht; die Maschine muß auch die Möglichkeit haben, Befehle, die nicht mehr vorkommen, *vergessen* zu können. Man ist daher dazu übergegangen, die einzelnen Befehle des Rechenplans unter Benutzung einer Verschlüsselung ebenfalls als Zahlen (genauer als Ziffernfolgen) zu schreiben und sie entweder der Maschine sukzessive durch einen oder mehrere Lochstreifen (magnetisches Stahlband usw.) zuzuführen oder sie wie die Rechengrößen in einem *Befehlsspeicher* aufzubewahren. Oft ist der Befehlsspeicher mit dem Zahlenspeicher identisch, so daß ein Rechnen mit Befehlen (vgl. § 4.6)<sup>1)</sup> möglich wird. Ein Beispiel dazu: Es soll die Funktion  $y = ax$  tabelliert werden. Die gegebenen Werte  $x_1, x_2, \dots$  des Arguments mögen in den Zellen Nr. 1, 2, ... usw. des Speichers stehen. Zur Berechnung von  $y_1$  wird der Befehl (er sei in der Zelle Nr. 100 des Speichers magaziniert) lauten: «Nimm die Zahl aus Zelle Nr. 1 und multipliziere sie mit  $a$ .» Der Befehl enthält also eine Zahl, nämlich die «*Adresse*» 1 der Zelle. Um nun weiterzugehen, kann man einen «Superbefehl» verwenden, der lautet: «Addiere zu der in Zelle Nr. 100 stehenden Adresse den Wert 1.» Gelangt nun im nächsten Schritt unser Befehl aus Zelle Nr. 100 wieder zur Anwendung, so wird er jetzt den Argumentwert  $x_2$  herausgreifen und die Multiplikation mit  $a$  veranlassen.

Eine hohe Flexibilität in der Befehlsgebung ist auch deswegen anzustreben, weil größere Rechenstrukturen immer in einen Hauptrechenplan und verschiedene Unterpläne zerfallen, die mehrfach wiederholt werden müssen. Muß z. B. während einer Rechnung eine Wurzel gezogen werden, so ist der *Sprungbefehl* zu geben: «Gehe über auf den Unterplan der Wurzelberechnung.» Wird zum Wurzelziehen eine der bekannten Iterationsmethoden verwendet, so muß nur die Befehlsreihe für einen Iterationsschritt in der Maschine sein; sie wird so oft wiederholt, bis die erstrebte Genauigkeit erreicht ist. Mit anderen Worten:

<sup>1)</sup> Das Zeichen § bezieht sich auf die Abschnitte des vorliegenden Berichts.

Ist  $\varepsilon > 0$  eine gegebene Genauigkeitstoleranz und  $w_n$  der  $n$ -te von der Maschine errechnete Näherungswert von  $\sqrt{a}$ , so ist noch  $\delta_n = |w_n^2 - a| - \varepsilon$  zu bilden und abzuberechnen, sobald  $\delta_n$  negativ wird. Der Sprungbefehl für das Zurückgehen auf den Hauptplan und Fortführen der allgemeinen Rechnung ist also *bedingt*, das heißt abhängig von dem von der Maschine selbst errechneten Wert  $\delta_n$ .

Es wurden hier absichtlich einige Komplikationen der Programmgebung vorweggenommen, die später genauer behandelt werden (vgl. § 4). Dies geschah einerseits, um dem Leser den Begriff «programmgesteuert» in seiner ganzen Tragweite näherzubringen, andererseits um zu begründen, warum auch Lochkartenmaschinen im folgenden nicht behandelt werden, obwohl sie wegen ihrer Fähigkeit des raschen Sortierens, Umordnens und Zusammenfassens von Zahlenmaterial, also wegen ihrer Eignung für mengentheoretische und kombinatorische Aufgaben vorzüglich für die Zwecke der mathematischen Statistik verwendbar sind.

1.3. Ein anderer, nicht so grundsätzlicher Fortschritt der Rechenautomaten gegenüber den Bürorechenmaschinen besteht darin, daß durch die Ersetzung der mechanischen Schaltelemente (Sprossenräder, Staffelwalzen) durch elektrische Elemente — speziell Elektronenröhren — die *Rechengeschwindigkeiten* stark erhöht werden konnten. Moderne Maschinen rechnen arithmetische Grundoperationen etwa 300mal schneller als ein Rechner mit der Bürorechenmaschine, und man hat sich überlegt, daß man für die speditive Integration einer partiellen Differentialgleichung mit drei unabhängigen Variablen etwa 100 000mal schneller rechnen sollte als der Mensch. Andererseits hat es sich gezeigt, daß man diese hohen Rechengeschwindigkeiten in zwei wesentlichen Punkten überhaupt noch nicht richtig beherrscht. Einmal ist es schwierig, bei einem mit mehreren tausend Elektronenröhren ausgerüsteten Gerät die nötige *Betriebs-sicherheit* herzustellen, so daß man beginnen mußte, Kontrollwerke zur Aufdeckung von Rechenfehlern und ausgeklügelte Systeme der mathematischen Überwachung des Rechenvorganges einzubauen [15], [26]. Sodann braucht die Vorbereitung eines Problems durch das wissenschaftliche Personal von der mathematischen Konzeption des physikalischen Sachverhalts bis zur endgültigen Herstellung des Lochstreifens für die Befehle oft ein Mehrfaches der Zeit, die von der Maschine dann für die Durchführung benötigt wird. Die Möglichkeiten, um hier ein vernünftiges Gleichgewicht zu schaffen, beginnen sich erst langsam abzuzeichnen und werden noch mühevoller, aber interessante Jahre der Entwicklung brauchen. Man muß eben auch Teile der Vorbereitung durch spezielle Maschinen erledigen, also es dem Rechenautomaten überlassen, einen vom Mensch gegebenen Gesamtbefehl pyramidenförmig in Teilbefehle aufzulösen. Ein solcher Gesamtbefehl könnte dann etwa lauten: «Berechne das unbestimmte Integral der in der Zellengruppe 1–100 des Speichers stehenden Funktion.» Ein erster Schritt in dieser Richtung wurde getan: In Prof. HOWARD H. AIKENS Maschine «Mark III» (1950) [4], [47] wird die Verschlüsselung des



Befehlsstreifens durch eine *Chiffriermaschine* (coding box) besorgt, auf welcher der Mathematiker die einzelnen Rechenoperationen in der normalen mathematischen Formelsprache eintasten kann. Übrigens hatte der deutsche Ingenieur K. ZUSE auf seiner im Jahre 1945 fertigen programmgesteuerten Maschine bereits ein ähnliches *Planfertigungsgerät* [36], [66], [67].

Es ist infolge der dargelegten Gründe wohl nicht abwegig, die Entwicklung der Rechenautomaten nicht in der sprunghaften Erhöhung der Rechengeschwindigkeit zu sehen, sondern zunächst an langsameren, aber betriebssicheren Geräten die nötigen Erfahrungen zu sammeln. Diesen Weg hat AIKEN bei der Konstruktion seiner Maschinen «Mark I—III» beschritten.

1.4. Es besteht eine dreifache Beziehung der Rechenautomaten zur mathematischen *Logik* und *Logistik*. Erstens haben wir eben ausreichend begründet, daß man auch an die Konstruktion von Automaten denkt, die andere Angaben als Zahlen (etwa Befehle) verarbeiten müssen. Bei diesem Rechnen in allgemeinen *algebraischen Strukturen* sind von den grundlegenden Operationen «&» und «V» des logistischen Aussagenkalküls [29] und den Operationen  $\cap$  und  $\cup$  der *Verbandstheorie* [14] über das arithmetische Rechnen bis zum Chiffrieren und Auflösen von Gesamtbefehlen grundsätzlich dieselben Schritte in wachsender Kompliziertheit zu machen. Hierher gehören auch die oben erwähnten mengentheoretischen Aufgaben des Sortierens und Auswählens (vgl. [42], ferner J. v. NEUMANN in [24], Bd. 2, und J. W. MAUCHLY in [39], Lecture 22) und Operationen wie das Auswählen der größten Zahl unter einer im Speicher stehenden Menge von Zahlen. ZUSE hat auf seiner Maschine bereits Knöpfe für die genannten logistischen Grundoperationen und hat auch dem hier angeschnittenen allgemeinen Rechnen bemerkenswerte, zum Teil leider unveröffentlichte Studien gewidmet [65], [67].

Zweitens ist das Vorbereiten eines mathematischen Problems für die Maschine (*Coding* oder *Planfertigung* genannt) weitgehend als Spezialgebiet der Logik anzusehen. Es verlangt dies eine Erforschung der Struktur mathematischer Rechenprozesse und ihrer Übersetzung in die Sprache der Maschine. Diese Theorie ist von J. v. NEUMANN und HERMANN H. GOLDSTINE [24] entwickelt worden; unser § 4 ist ihr gewidmet.

Drittens können die in Rechenautomaten verwendeten elektrischen Schaltungen durch die Symbole des logistischen Aussagenkalküls beschrieben werden (§ 5), und logistisches Rechnen kann daher bei der Planung von Schaltungen helfen. Dies weniger *a priori* als *a posteriori*, wenn es sich darum handelt, festzustellen, ob in einer fertigen Schaltung Elemente eingespart werden können. Theorien dieser Art sind von C. E. SHANNON [48] aufgestellt worden<sup>1)</sup>; AIKEN hat sie durch Herstellung von Tabellen zu einem gebrauchsfähigen Instrument bei der Planung von Rechenautomaten ausgearbeitet [5].

<sup>1)</sup> Vgl. auch [21], [43].

1.5. Es ist reizvoll, das Leitwerk eines Rechenautomaten mit dem zentralen Nervensystem eines lebenden Organismus zu vergleichen und aus diesem Vergleich zu lernen. N. WIENER [56] ist diesen Beziehungen unter sehr allgemeinen Gesichtspunkten nachgegangen. Es zeigt sich aber, daß sich bis heute aus einem solchen Vergleich für die Konstruktion und Anwendung von programmgesteuerten Maschinen noch kein merklicher Gewinn ergibt. Jede heutige Maschine ist der Typus eines mechanisch-elektrischen Systems, dessen Ablauf vollständig determiniert ist. Sein Zustand zu irgendeiner Zeit  $t$  ist vollständig bestimmt durch den Zustand zur Startzeit  $t_0$ . Oder um es anders zu sagen: Eine Maschine besitzt niemals Phantasie. Während der Rechner jederzeit ein Urteil über die Plausibilität seiner Rechnung hat, fehlt der Maschine vollständig die Bezugnahme auf eine äußere Realität. Für sie gibt es nur einen amorphen Haufen von Zahlen im Speicher, den sie auf äußeren Zwang hin – nämlich nach dem Rechenplan – verarbeiten muß.

1.6. Ein kurzer *historischer Überblick* über die Entwicklung der Rechenautomaten hat mit den Arbeiten von CHARLES BABBAGE aus London einzusetzen, der um 1850 den Gedanken der Programmsteuerung entwickelt und teilweise in seiner rein mechanisch arbeitenden «Analytical Engine» verwendet hat. Bis 1938 wurden dann fast ausschließlich die Bürorechenmaschinen vervollkommen und Analogiegeräte für die verschiedensten Spezialzwecke gebaut. Die anschließenden vier Jahre sind gekennzeichnet durch den Bau von Rechenautomaten, die elektromagnetische Relais als Schaltelemente benutzen. (USA. 1943 Relay calculator der Bell Telephone Laboratories. 1944 AIKENS «Mark I» unter Zusammenarbeit mit der «International Business Machines Corp.», wobei noch mechanische Zählwerke dieser Firma verwendet wurden. In Deutschland 1945 ZUSES im Dualsystem rechnende Relaismaschine mit mechanischen Speichern.) Eine Pionierleistung ersten Ranges war dann die schnelle und vollständig elektronisch arbeitende ENIAC, die 1945 von der *Moore School of Electrical Engineering* der University of Pennsylvania für die Zwecke der amerikanischen Armee von J. PRESER ECKERT, JOHN MAUCHLY und HERMANN H. GOLDSTINE gebaut worden ist [57]. Die seitherigen Entwicklungen sind in technischer Hinsicht hauptsächlich durch das Bestreben gekennzeichnet, die Speicher zu vervollkommen (vgl. § 5). Während die ENIAC nur zwanzig zehnstellige Zahlen als elektrische Zustände von Elektronenröhren speichern konnte, haben moderne Maschinen schon eine Speicherkapazität von mehreren tausend Zahlen. Andererseits soll die *Suchzeit* verringert werden. (Dies ist die Zeit, welche die Maschine braucht, um eine Zahl aus dem Speicher abzulesen und ins Rechenwerk zu bringen.) Diese Suchzeit bestimmt nämlich im wesentlichen die Arbeitsschnelligkeit der Maschine überhaupt.

In Europa setzen die neueren Konstruktionen zuerst in England ein. (F. C. WILLIAMS entwickelt Speicher aus gewöhnlichen Kathodenstrahlröhren, Maschinen werden im National Physical Laboratory von TURING und WILKIN-



SON gebaut und an der Universität Cambridge von WILKES.) Frankreich (L. COUFFIGNAL [44]), Belgien und Holland bauen Maschinen; Schweden und die Schweiz besitzen je eine Relaismaschine.

Wir können hier aus Platzgründen nicht auf alle neueren amerikanischen Konstruktionen eingehen; wir haben statt dessen die uns zugänglichen Informationen in den *Tabellen* auf S. 291–294 zusammengestellt.

1.71. Der Rest dieses einführenden Kapitels sei den *Anwendungen* der programmgesteuerten Maschinen gewidmet. Da die Maschine in arithmetischer Hinsicht nur addieren, multiplizieren und vielleicht dividieren kann, ist sie nur in der Lage, Probleme zu bearbeiten, die arithmetisiert, das heißt in eine Kette von solchen Grundoperationen aufgelöst sind. Eine wesentliche Ergänzung dieses Sachverhalts ist allerdings zu betonen. Die Maschine kann auch *annähernd* ein Resultat  $a$  auswerten, das mathematisch als *Grenzwert* einer Folge von Zahlen  $a_n$  erscheint, von denen jede einzelne durch eine endliche Kette von Grundoperationen errechenbar ist. Man wird eben bei einem genügend hohen Wert von  $n$  die Folge abbrechen. Den so entstehenden Fehler wollen wir als *Abbrechfehler* (truncation error) bezeichnen. Von dieser Art sind viele Iterations- und Reihenentwicklungsprozesse der Mathematik. Sie eignen sich besonders gut für Rechenautomaten, wenn die Berechnung eines Gliedes  $a_n$  der Folge immer nach derselben Rechenvorschrift unabhängig von  $n$  geschieht und nur die Werte in dieser Rechnung mit  $n$  variieren. Man kann dann nämlich für alle  $a_n$  denselben Unterrechenplan (vgl. § 1.2), also dieselbe Befehlsreihe, verwenden. (Auf vielen Maschinen erscheint ein solcher «zyklischer» Unterplan als zu einem Band ohne Ende zusammengeklebter Lochstreifen, so daß er beliebig oft ablaufen kann.) Dieselbe Situation tritt in etwas anderer Form dann auf, wenn die  $a_n$  selbst gesuchte Resultate und etwa durch eine Rekursionsformel untereinander verknüpft sind (Integration einer Differenzengleichung).

Zusammenfassend ist also ein Rechenautomat — im Gegensatz zum Analogiegerät — eine *diskontinuierlich* rechnende Maschine, die Rechenstrukturen bevorzugt, die weitgehend *zyklisch* sind. Aus diesem Grund ist die *Differenzenrechnung*, als Ersatz der Differentialrechnung, ein grundlegendes theoretisches Hilfsmittel des mit einem Automaten arbeitenden Mathematikers.

1.72. Die Prüfung der Zweige der numerischen Mathematik ergibt folgende Auswahl von Teilgebieten, die sich für maschinelle Behandlung eignen.

1.721. *Tabellierung* von Funktionen, die durch Reihen, Integrale oder andere Grenzprozesse definiert sind. Als durchgeführte Arbeiten sind vor allem die Tabellenwerke der Harvard University zu nennen [2].

Nach einem Vorschlag von Prof. S. BERGMANN (Harvard) sollte man nun auch an Tabellen von Funktionen zweier Variablen gehen. Er denkt dabei in erster Linie an seine Kernfunktionen oder Greenschen Funktionen für ebene Gebiete, die in der Technik öfters auftreten (Querschnitte von Staumauern oder dergleichen). Wichtige Beispiele für Tabellen sind die *astronomischen Epheme-*

riden für die Bewegung der Himmelskörper. Auf der New-Yorker Maschine SSEC der International Business Machines Corp. wurde zum Beispiel eine Mondephemeride gerechnet, wobei die Auswertung eines Mondortes nach der berühmten, ungefähr 50 Seiten langen Mondformel nur 7 Minuten benötigt [32].

Maschinen müssen aber auch Funktionstabellen für ihre Rechnungen heranziehen können. Man führt dies heute meistens so durch, daß man einen ziemlich groben Satz von Funktionswerten in den Speicher gibt und dann die Maschine mit höheren Differenzen interpolieren läßt. Einige Geräte besitzen noch besondere Lochstreifen für die Eingabe von Funktionen.

1.722. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem Auflösen von *Systemen linearer Gleichungen* mit vielen Unbekannten geschenkt. Neuere Rechenautomaten können etwa 30 Gleichungen in einer Stunde bewältigen. Rechnet man nach einer der Eliminationsmethoden, so hat man wieder die typische Auflösung in sich dauernd wiederholende zyklische Unterpläne. Die Theorie der maschinellen Gleichungsauflösung wurde hinsichtlich der Methoden und der Genauigkeitsfragen von v. NEUMANN, GOLDSTINE und BARGMANN [40] entwickelt. Eng damit hängen die übrigen Algorithmen der linearen Algebra zusammen. (Multiplikation und Inversion von Matrizen, Berechnung von Eigenwerten durch Iteration).

1.723. Die heutigen Maschinen eignen sich besonders gut zur numerischen Integration von *gewöhnlichen Differentialgleichungen* und zur Behandlung der damit zusammenhängenden Aufgaben wie Rand- und Eigenwertprobleme und Probleme der Störungsrechnung. Dies liegt am linearen Charakter der digitalen Maschinen. Wie eine Differentialgleichung in Schritten der unabhängigen Variablen fortschreitet, so geht eben auch eine Maschine in kleinen zeitlichen Schritten vorwärts. Als wichtige Anwendungen sind zu verzeichnen die Berechnung von kritischen Drehzahlen, Lasten und Frequenzen; Stabilitätsuntersuchungen und Probleme der nichtlinearen Mechanik sowie die Berechnung von Flugbahnen in der äußeren Ballistik.

1.724. Langsam beginnen die Rechenautomaten auch, sich das sorgenvolle Gebiet der *partiellen Differentialgleichungen* zu erobern, obwohl es schwer ist, die hohen Anforderungen an Speicherkapazitäten und Rechengeschwindigkeiten zu erfüllen. Was zunächst die elliptischen Randwertprobleme vom Typus  $\Delta u = 0$  und  $\Delta \Delta u = 0$  betrifft, so lassen sich im wesentlichen zwei maschinelle Methoden finden, nämlich die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen (S. BERGMANN [11]), bei denen die Differentialgleichung zum vorneherein erfüllt wird, und die Methoden der Variationsrechnung, bei der die Konkurrenzfunktionen den Randbedingungen genügen. Das letztere Verfahren nimmt — numerisch gewendet — meistens die Form der *Methode des stärksten Abstiegs* an (vgl. H. GOLDSTINE in [39], Lectures 6, 7, 12, 18), die man sich am besten an folgendem geometrischen Bild klarmacht. Eine im Raum liegende Fläche besitze einen tiefsten Punkt, dem man sich ausgehend von einem auf der Fläche lie-



genden ersten Versuchspunkt auf einem Weg auf der Fläche sukzessive annähern soll. Dann wird man eben in jedem Moment des Annäherungsvorgangs in der steilsten Richtung, das heißt senkrecht zur Tangente an eine Niveaulinie der Fläche, absteigen müssen.

Die diesbezügliche Rechentechnik ist von SOUTHWELL in England unter dem Namen *Relaxationsrechnung* entwickelt und verfeinert von W. E. MILNE (Institute for Numerical Analysis, Los Angeles [53]) den Rechenautomaten angepaßt worden.

Im Zusammenhang mit den parabolischen Gleichungen der Diffusion und Wärmeleitung sei die *Monte-Carlo-Methode* erwähnt, über die S. M. ULAM in [38], [53] berichtet hat und die ganz neue Perspektiven eröffnet. Sie kann im Zusammenhang mit den partiellen Differentialgleichungen so erklärt werden, daß zum Beispiel der Diffusionsvorgang eines Gases nicht in die mathematische Sprache einer partiellen Differentialgleichung übersetzt wird, sondern die einzelnen Elementarvorgänge, also das Zusammenstoßen der Gasmoleküle untereinander und mit der Wand, im Rechenautomaten nachgespielt werden. Er muß dazu ein wesentlich neues Organ bekommen, welches Zufallswerte nach einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion erzeugen kann. Auch die eben behandelten elliptischen Randwertprobleme wird man vielleicht einmal so lösen können; die Methode des stärksten Abstiegs ist nämlich nichts anderes als die Integration einer Wärmeleitungsgleichung (vgl. R. COURANT in [52]).

Auch Probleme der Wellenausbreitung, also hyperbolische Gleichungen, wurden mit Maschinen erfolgreich in Angriff genommen, wobei meistens die *Methode der Charakteristiken* verwendet wird. Dasselbe gilt für die in den modernen Anwendungen (Gasdynamik, Ultraschall, Turbulenz, Explosionen) auftretenden nichtlinearen Probleme, bei denen man sich in näherer Zukunft von den digitalen Maschinen Hilfe für das Verständnis der teilweise recht schwierigen Erscheinungen erhofft [52], [53].

1.73. Die Existenz von digitalen Rechenautomaten hat bereits die Entwicklung der *numerischen Analysis* weitgehend beeinflußt. Wir haben eben einiges in dieser Richtung erwähnt. Es kann vorkommen, daß eine numerische Methode, der sich der Einzelrechner gerne bedient, für die Maschine völlig ungeeignet ist und umgekehrt. Niemand wird sich zum Beispiel auf die Monte-Carlo-Methode für das Rechnen mit Bleistift und Papier einlassen wollen. Bisher weniger beachtete numerische Methoden, wie etwa das Abkürzen einer Potenzreihe durch Tschebyscheffsche Polynome oder Kettenbruchentwicklungen, gewinnen an Bedeutung [27].

Besonders aber beginnt nun die Theorie der *Auf- und Abrundungsfehler* entwickelt zu werden, die für längere Rechenserien mindestens so wichtig ist wie das bisher fast ausschließlich betriebene Abschätzen des in § 1.71 definierten Abbrechfehlers. Beide Fehlerursachen wirken einander in der Regel entgegen,

und jede numerische Rechnung muß zwischen dieser Scylla und Charybdis hindurchgesteuert werden. In [40] hat v. NEUMANN gezeigt, daß sich beim Auflösen von linearen Gleichungen die Rundungsfehler so anhäufen können, daß überhaupt keine richtige Dezimale mehr aus der Maschine herauskommt. In [52] gibt H. A. RADEMACHER eine Untersuchung der Fehlerfortpflanzung bei der numerischen Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hier und auch speziell bei den partiellen Differentialgleichungen vom Wärmeleitungstypus können die Rundungsfehler direkt *numerische Instabilität* bewirken, das heißt, ein beliebig kleiner Rundungsfehler am Anfang der Integration kann nach genügend vielen Integrationsschritten das Resultat beliebig stark verfälschen [54], so daß es zum Beispiel vollständig unmöglich wird, eine gegebene Randbedingung am hintern Ende des Integrationsintervalls zu erfüllen (vgl. auch [39], Lecture 5). Dies hat v. NEUMANN veranlaßt, ein Verfahren zu entwickeln, um die Randbedingungen (abgesehen von einer einzigen) am hinteren Ende auf das vordere Ende zu verschieben, wobei allerdings die Ordnung der Differentialgleichung erhöht wird. C. BRAMBLE hat mit Hilfe von «Mark II» Rundungsfehler empirisch untersucht [53]. Über andere numerische Untersuchungen berichtet C. V. L. SMITH [50] (speziell Arbeiten von A. SARD). Vgl. ferner MTAC<sup>1</sup>).

1.74. Neben den direkten Anwendungsgebieten der Mathematik (Versicherungsmathematik, theoretische Physik, Geodäsie und Geophysik, Technik) haben auch schon etwas ferner liegende Wissenschaften sich für digitale Maschinen interessiert. In Princeton wird zum Beispiel die Entwicklung einer rechnerischen Wetterprognose versucht, indem, ausgehend vom gemessenen Zustand der Atmosphäre in den Punkten einer vertikalen Front, die Differentialgleichungen der Physik der Atmosphäre integriert werden. [52] und [53] enthalten Berichte der Anwendung von Rechenautomaten auf die mathematischen Modelle der Nationalökonomie.

Als Abschluß mag für den Leser die folgende kleine Liste nicht uninteressant sein. Sie enthält Probleme, in deren Lösung auf digitalen Maschinen die Verfasser Einblick hatten:

SSEC-Maschine, New York. Ausbreitung einer von einem Zentrum  $O$  ausgehenden kugelförmigen Explosionswelle in einem kompressiblen Medium, dessen Materialeigenschaften Funktionen des Abstandes von  $O$  sind.

Lösung der bei der Berechnung einer Poiseuille-Strömung auftretenden Eigenwertprobleme. Berechnung von Atomspektren.

Mark-I-Maschine (Harvard). Auswertung der funktionentheoretischen Lösung für das Strömungsfeld einer schief angeströmten unendlich langen Platte (Freistrahproblem). Störung der Temperaturverteilung in einem zylindrischen Stahlkörper durch den Einbau eines Thermoelements. Bestimmung der Eigenwerte Mathieuscher Differentialgleichungen.

<sup>1</sup>) Die Zeitschrift «Mathematical Tables and other Aids to Computation» (sie enthält viele Beiträge über Rechenautomaten und numerische Methoden).



## § 2. Organisation und Arbeitsweise

2.1. In Fig. 1b ist versucht worden, das *Prinzipschema* eines Rechenautomaten aus der Fig. 1a zu entwickeln, welche die Arbeit eines Rechners darstellt, der einen längeren Rechenauftrag mit Büromaschine, Bleistift und Papier und eventuell unter Beiziehung einer Funktionstabelle (trigonometrische Tabelle usw.) erledigen muß. Wir überlassen es dem Leser, der Analogie im ein-

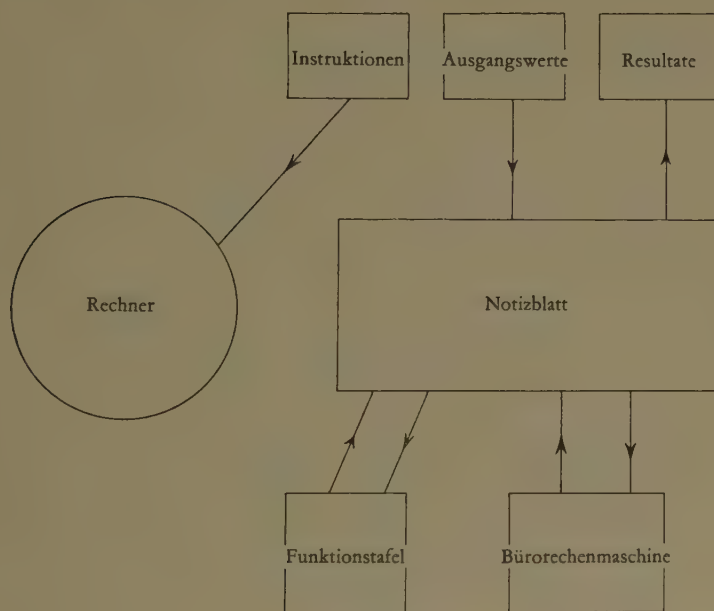


Fig. 1a

Schema der Arbeit mit einer Bürorechenmaschine.

zeln nachzugehen; Organe, die in der einen Figur dieselbe Funktion haben wie in der andern, wurden an entsprechender Stelle gezeichnet. Wir begnügen uns daher damit, im folgenden die einzelnen Teile eines Rechenautomaten zu besprechen, wobei auf § 5 hingewiesen sei, in dem diese Teile vom technischen Standpunkt aus eingehend behandelt werden.

2.2. Dem ganzen Komplex übergeordnet ist das *Leitwerk* (vgl. § 1.1), dessen elektrische Einrichtung man am besten mit derjenigen einer vollautomatischen Telephonzentrale vergleicht, mit dem Unterschied, daß zu den dort verwendeten Relais und Schrittschaltern für schnelle Schaltoperationen Elektronenröhren hinzutreten. Das Leitwerk liest die Befehle in der nötigen Reihenfolge ab und löst durch elektrische Einzelsignale oder Signalfolgen in den übrigen Teilen der Maschine die erforderlichen Operationen aus.

Das *Rechenwerk* führt die arithmetischen Grundoperationen aus. Normalerweise kann es zwei Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und bei einigen Maschinen auch dividieren. Im Gegensatz zu früheren Konstruktionen (Mark I, ENIAC) ist bei den heutigen Automaten das Rechenwerk nur in einer Ausführung vorhanden; es kann also nicht – wie etwa bei den Lochkartenmaschinen – in mehreren Zählwerken parallel gearbeitet werden.

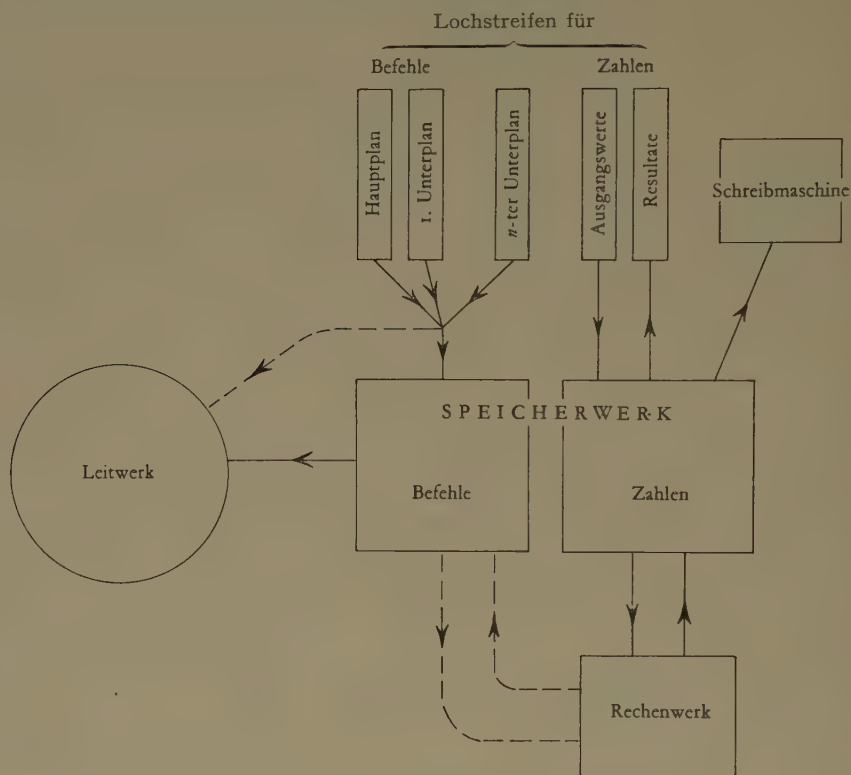


Fig. 1b

Blockschema eines Rechenautomaten.

Im Zusammenhang mit dem Rechenwerk soll noch auf die elektrische *Darstellung der Zahlen* in der Maschine hingewiesen werden. Jede Zahl, jeder Befehl und überhaupt jede Information erscheint im Automaten als Folge elektrischer Impulse, die *zeitlich hintereinandergestaffelt* durch die elektrischen Leitungen ziehen. Dabei ist nicht die Größe des Impulses bedeutsam, sondern nur, ob an der betreffenden Stelle ein Impuls vorhanden ist oder nicht. Die Darstellung der Zahlen erfolgt also durch *Ja-Nein-Werte*. Eine 10stellig dezimal geschriebene Zahl kann durch ungefähr 40 Ja-Nein-Werte dargestellt werden (vgl. § 3.2),



oder — in der Sprache der Maschine — durch 40 Signale, die wie ein Morsetelegramm in einem Draht weitergeleitet werden. Natürlich kann man auch statt dessen etwa ein Bündel von 4 Leitungen verwenden, die 40 Ja-Nein-Werte auf 4 Gruppen zu je 10 verteilen. Die 4 Gruppen können dann *gleichzeitig* gesendet werden. Die Maschine arbeitet dann hinsichtlich der Gruppen *parallel*, bezüglich der 10 Impulse einer Gruppe aber *in Serie*. Die Übersetzung der von der Außenwelt kommenden *Worte* (dezimal geschriebene Zahlen oder als Zahlen verschlüsselte Befehle (vgl. § 1.1) in die Sprache der Ja-Nein-Werte geschieht in einem speziellen Gerät, das entweder in dem Automaten eingebaut oder als Zusatzgerät ausgebildet ist. Dasselbe gilt für das Zurückübersetzen beim Ab liefern von Resultaten.

Der *Speicher* dient zur Aufbewahrung von Zahlen (Anfangswerte der Rechnung, Zwischenresultate, Ergebnisse) und eventuell von Befehlen (vgl. § 1.2). Er ist das Archiv aller Angaben, die in der Maschine überhaupt eine Rolle spielen. Auch hier erscheinen alle Angaben als Ja-Nein-Werte. Die *Kapazität* wechselt bei heutigen Maschinen zwischen 100 und 10000 zehnstelligen Dezimalzahlen. Präzisierend muß hinzugefügt werden, daß nur diejenigen Informationen in den Speicher gegeben werden, die kurzfristig wieder verfügbar sein müssen. Größere Mengen von Zwischenresultaten, die erst in einem späteren Arbeitsgang («run») der Maschine gebraucht werden, verlassen dieselbe und werden außerhalb in einem *äußern Gedächtnis* (etwa in der Form von Lochkarten, Lochstreifen oder Stahlband) magaziniert. Die hohen Anforderungen betreffend Einhaltung einer kleinen Suchzeit (vgl. § 1.6) haben verschiedene Konstrukteure veranlaßt, den Speicher aufzuteilen in einen schnell und elektronisch arbeitenden Speicher geringer Kapazität und weitere Speicher großer Kapazität, die langsamere Schaltelemente (Relais) verwenden und daher größere Suchzeiten aufweisen. Man kann diese Zwischenspeicher als Übergänge vom schnellen Speicher zum äußeren Gedächtnis ansehen. Außerdem sind vielfach *Konstantenregister* eingebaut. Es sind dies Speicher für vielgebrauchte Zahlenwerte (etwa 2,  $e$ ,  $\pi$  usw.), aus denen abgelesen, in die aber nicht eingegeben werden kann.

*Eingang* und *Ausgang* bilden die Verbindung des Rechenautomaten mit der Außenwelt und bestehen aus Abtastern für die einlaufenden Lochstreifen oder magnetischen Bänder und aus Lochern bzw. Schreibwerken für die auslaufenden. Neuere Maschinen besitzen im Zahlenein- und -ausgang stets mehrere unabhängig oder gekoppelt laufende Streifen und ebenso im Befehlseingang für den Hauptrechenplan und die verschiedenen Unterpläne (vgl. § 1.2). Normalerweise sind am Ausgang noch einige elektrische Schreibmaschinen angeschlossen, die Resultate in Tabellenform niederschreiben. Schließlich können auch Zahlen und Befehle von Hand eingetastet werden und Resultate von Signallampen abgelesen werden. Der Automat kann also wie eine Bürorechenmaschine verwendet werden, was insbesondere bei Kontrollrechnungen zur Beseitigung von Störungen erwünscht ist.

Eine Reihe von *Zusatzgeräten*, deren Arbeit örtlich und zeitlich von derjenigen des Rechenautomaten getrennt ist, sind noch zu nennen. Sie bestehen vor allem aus den Geräten zum Lochen der Streifen des Zahleneinganges und zum Ablesen der Resultate von den Streifen des Ausganges. Die Befehlsstreifen wurden früher ebenfalls in einem Handlocher hergestellt, so daß das Bedienungspersonal die Verschlüsselung von Instruktionen durch Zahlen (den «Code») kennen mußte. Neuerdings wird diese Arbeit durch ein Planfertigungsgerät (vgl. § 1.3) besorgt. Hinzu treten die Einrichtungen für das äußere Gedächtnis, die etwa in einer Ausrüstung von Lochkartenmaschinen bestehen können. Die Zusammenarbeit der Zusatzgeräte mit dem Automaten ist richtig zu organisieren; zum Beispiel kann auf dem Planfertigungsgerät ein neues Problem vorbereitet werden, während der Automat eine andere Aufgabe rechnet.

2.3. Die *Beschreibung der Arbeitsweise* fällt etwas verschieden aus, je nachdem ob ein Befehlsspeicher (vgl. § 1.2) vorhanden ist oder nicht. Im erstern Fall beginnt die Tätigkeit des Automaten damit, daß die Befehle vom Streifen abgelesen und in den Speicher eingeführt werden (ausgezogene Pfeile der Fig. 1b). Jede Zelle des Befehlsspeichers enthält dann einen Befehl. Ein in die Maschine eingebauter *Befehlszähler* (sequence counter), den man am besten mit der Mutteruhr einer elektrischen Uhrenanlage vergleicht, ruft nun die einzelnen Zellennummern in ihrer natürlichen Reihenfolge auf; der in der Zelle enthaltene Befehl wird abgelesen und vom Leitwerk ausgeführt. Diese normale Arbeit des Befehlszählers wird modifiziert, wenn er (etwa nach Abgreifen der Zellen 1 bis 100) auf einen Sprungbefehl (vgl. § 1.2) stößt, der in der Zelle 101 enthalten ist. Dieser Sprungbefehl kann lauten: «Der Zählerstand des Befehlszählers ist auf 325 zu stellen.» Dies wird ausgeführt, so daß dann der Befehlszähler beim nächsten Schritt nicht den Befehl in Zelle 101, sondern denjenigen in Zelle 325 aufruft, was zum Beispiel den Übergang zu einem andern Unterrechenplan bedeuten kann. Im Falle von bedingten Sprungbefehlen muß auch das Rechenwerk den Stand des Befehlszählers beeinflussen können<sup>1</sup>). Diese Organisation der Maschine erlaubt ein sehr flexibles Springen von einer Befehlsreihe zur andern.

Bei den Automaten ohne Befehlsspeicher ist für jeden Unterplan ein separater Befehlsstreifen im Eingang der Maschine vorzusehen. Die Befehle werden direkt von einem dieser Streifen abgetastet, ausgeführt, und dann wird der Streifen um eine Zeile weitergerückt (gestrichelter Pfeil in Fig. 1b). Ein Sprungbefehl bewirkt entweder das Weiterlaufen des Streifens *ohne* Ausführung der dabei durchlaufenen Befehle und Wiedereinsetzen bei einem späteren Befehl oder dann den Übergang auf einen anderen Befehlsstreifen.

<sup>1</sup>) Gelegentlich werden auch Befehle mit leerer *Adresse* (vgl. § 1.2) benutzt, also zum Beispiel: «Springe auf den Befehl in Zelle . . .». Die Leerstelle kann dann auch durch eine von der Maschine selbst gelieferte Zahl ersetzt werden, zum Beispiel – wenn eine Befehlsreihe unterbrochen, aber später wieder aufgenommen werden soll – durch den Zählerstand des Befehlszählers beim Abbruch dieser Reihe (vgl. auch § 4.6).



Bezeichnung	Erbauer	Standort	Jahr der Fertigstellung	Zahlsystem; Stellenzahl	Art des Speichers; Kapazität	Art der Befehlsgebung	Impulsfrequenz	Suchzeit	Rechenwerk in Serie (S) oder parallel (P); Multiplikationszeit	Bemerkungen	Literatur- hinweise
Automatic Sequence Controlled Cal- culator (Mark I)	Aiken, mit International Business Machines	Cambridge, Mass., USA.	1944	dezimal 23	Z 72	Befehls- streifen 2-Adr.		O	P 6 s	Arbeitet mit Zäh- lern; 3000 Relais	1, 12
ENIAC (Electro- nic Numerical Integrator and Calculator)	University of Pennsylvania, USA.	Aberdeen, Md., USA.	1945	dezimal 10	F 20	2-Adr.	50 kc/s	einige ms	P 5,6 ms	18000 Röhren	12, 19, 28, 39, 46, 52, 75
Z 4	ZUSE (Neukirchen, Deutschland)	ETH, Zürich	1945	dual 23	M 64	Befehls- streifen 1-Adr.	35 c/s	1/2 s	P 2 s	2000 Relais; glei- tendes Komma Neukonstruktion 1950	36, 66
Bell Relay Com- puter, Model V	Bell Telephone Co.	Aberdeen, Md., USA.	1946	dezimal 7	R	Befehls- streifen 3-Adr.		O	P 1 s	9000 Relais; glei- tendes Komma; außerordentlich betriebsicher	6, 8, 52
Selective Sequence Electronic Calculator	International Business Machines	New York USA.	1948	dezimal 14	F; R 150	Befehls- streifen und Speicher 4-Adr.	50 kc/s	einige ms	P 20 ms (inkl. Suchzeit)	12 500 Röhren, 20 000 Relais	32
Mark II Calculator	Aiken, mit Harvard University	Dahlgren, Va., USA.	1948	dezimal 10	R 100	Befehls- streifen 1-Adr.	60 c/s	O	P 800 ms	12 000 Relais; gleitendes Kom- ma; keine direkte Division	3, 52

*Übersicht über die im Betrieb oder im Bau befindlichen Rechenautomaten*  
(Stand Dezember 1949)

Bezeichnung	Erbauer	Standort	Jahr der Fertigstellung	Zahlsystem; Stellenzahl	Art des Speichers; Kapazität	Art der Befehlsgebung	Impulsfrequenz	Suchzeit	Rechenwerk in Serie (S) oder parallel (P); Multiplikationszeit	Bemerkungen	Literatur- hinweise
EDSAC (Electronic Delay Storage Automatic Calculator)	Cambridge University (WILKES)	Cambridge England	1949	dual 34	U 512	Zahlen- speicher 1-Adr.	500 kc/s	0,5 ms	S	3000 Röhren, darunter zahlreiche Dioden; keine direkte Division	58, 59, 60, 61, 62
BINAC	Electronic Control Co., Philadelphia (ECKERT, MAUCHLY)	Manhattan Beach, Calif. (Northrop Aircraft Co.)	1949	dual 30	U 512	Zahlen- speicher 1-Adr.	4 Mc/s	0,25 ms	S ca. 500 $\mu$ s	Zwei identische Maschinen zusammengesetzt (vgl. § 4.9); je 750 Röhren, nebst zahlreichen Kristallen	10
—	University of Manchester, England (WILLIAMS)	Manchester	1949	dual	W 128	Zahlen- speicher 1-Adr.		O	S	2100 Röhren, davon viele Dioden; gerätvorwiegend für elektrische Versuche	33, 63
Mark III Calculator	AIKEN, mit Harvard University	Cambridge, Mass., U.S.A.	1950	decimal 16	T 4200	Befehls- speicher 3-Adr.	28 kc/s	4,3 bzw. 50 ms	S 13,2 ms	4500 Röhren, 2000 Relais, Speicher in 200 Zellen von kurzer und 4000 Zellen von längerer Suchzeit gegliedert. Keine direkte Division	4, 47, 53

Fortsetzung



Übersicht über die im Betrieb oder im Bau befindlichen Rechenautomaten  
(Stand Dezember 1949)

Fortsetzung

Bezeichnung	Erbauer	Standort	Jahr der Fertigstellung	Zahlsystem; Stellenzahl	Art des Speichers; Kapazität	Art der Befehlsgebung	Impulsfrequenz	Suchzeit	Rechenwerk in Serie (S) oder parallel (P); Multiplikationszeit	Bemerkungen	Literatur- hinweise
Interim	National Bureau of Standards	Washington, D. C., USA.	*	dual 43	U 512	Zahlen- speicher 4-Adr.	1 Mc/s	0,2 ms	S 3 ms		9
IAS	Institute for Advanced Study (von NEUMANN)	Princeton N. J., USA.	*	dual 39	W 1024	Zahlen- speicher 1-Adr.		O	P 120 $\mu$ s	2000 Röhren	13, 20, 24
—	Raytheon Co., Waltham, Mass., USA.	Waltham	*	dual 35	U 4000	Zahlen- speicher 4-Adr.	2 Mc/s	0,2 ms	P ca. 1 ms	Zirka 8000 Röh- ren, zirka 10000 Kristalle; hoch- kompliziertes Ge- rät. Spezielle Re- chenkontrolle (vgl. § 4.9)	15, 16, 53
—	General Electric Co.	Syracuse, N. Y., USA.	*	dezimal 8	T 4000	Zahlen- speicher 4-Adr.	100 kc/s	33 ms	P 800 $\mu$ s	800 Röhren, zahl- reiche Kristalle	53
ACE (Automatic Calculating Engine)	National Physical Laboratory	Teddington, England	*	dual	U	3-Adr.	1 Mc/s	0,5 ms	S ca. 1 ms		
UNIVAC	Electronic Control Co., Philadelphia (ECKERT, MAUCHLY)	Philadelphia, USA.	*	dezimal 11	U 1000	Zahlen- speicher 1-Adr.	2 Mc/s	0,2 ms	S	3500 Röhren, zahlreiche Kri- stalle; Gerät für kommerzielle Zwecke	51

*Übersicht über die im Betrieb oder im Bau befindlichen Rechenautomaten*  
(Stand Dezember 1949)

Bezeichnung	Erbauer	Standort	Jahr der Fertigstellung	Zahlsystem; Stellenzahl	Art des Speichers; Kapazität	Art der Befehlsgebung	Impulsfrequenz	Suchzeit	Rechenwerk in Serie (S) oder parallel (P); Multiplikationszeit	Bemerkungen	Literaturhinweise	Fortsetzung
ARC (Automatic Relay Computer)	King's College London (Booth)	Welwyn Garden City, England	*	dual	T				P 0,3 s	300 Relais	17	
EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Calculator)	University of Pennsylvania (Moore School)	Aberdeen, Md., USA.	*	dual	U 1024	Zahlenspeicher 4-Adr.	1 Mc/s	0,2 ms	S 3 ms	3500 Röhren, viele Kristalle	39, 52	

*Erklärungen zu vorstehender Tabelle*

Verwendete Zeichen und Abkürzungen:

- \* Gerät noch nicht fertiggestellt
- F Flip-Flop
- M Mechanische Schaltglieder
- R Relais
- T Magnetische Trommeln
- U Ultraschall-Leitungen
- W Williams-Tube
- Z Mechanische Zähler
- O Suchzeit verschwindend gegenüber Operationszeit

In der Kolonne «Art der Befehlsgebung» ist die Art der *Speicherung der Befehle* sowie die Natur der Befehle angegeben.

Die Zahlen unter «Literaturhinweise» beziehen sich auf das beigegebene Literaturverzeichnis.

NB. Die Übersicht kann keinen Anspruch auf Vollständigkeit erheben, da viele Entwicklungen aus militärischen Gründen geheimgehalten werden.



## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AIKEN, H. H., *Manual of Operation for the Automatic Sequence Controlled Calculator (Mark I)* (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Bd. 1) (Cambridge, Mass., 1946), 561 S.
- [2] AIKEN, H. H., *Tables of the Bessel Functions of the First Kind* (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Bd. 3f.) (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1947f.).
- [3] AIKEN, H. H., *Description of a Relay Calculator (Mark II)* (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Bd. 24) (Cambridge, Mass., 1949), 366 S.
- [4] AIKEN, H. H., *Manual of Mark III*<sup>1)</sup>.
- [5]<sup>+2)</sup> AIKEN, H. H., *Progress Reports of the Harvard Computation Laboratory*, Bd. 2 (Dezember 1948), Bd. 3 (März 1949), Bd. 4 (Juni 1949) Bd. 5 (September 1949) (Cambridge, Mass., 1948/49).
- [6] ALT, F. L., *A Bell Telephone Laboratories' Computing Machine*, MTAC<sup>3)</sup> 3, 1—13 und 69—84 (1948).
- [7] ANDREWS, E. G., *The Bell Computer, Model VI*, Electr. Eng. 68, 751—756 (1949).
- [8] ANDREWS, E. G., *Use of the Relay Digital Computer (Bell)*, Electr. Eng. 69, 158—163 (1950).
- [9] ANONYMUS, *NBS Interim Computer*, Techn. News Bull. NBS 33, 16—17 (1949).
- [10] AUERBACH, F. L., ECKERT, J. P., SHAW, R. F., und SHEPPARD, C. B., *Mercury Delay Lines Using a Pulse Rate of Several Megacycles*, Proc. Inst. Radio Eng. 37, 855—861 (1949/II).
- [11] BERGMANN, S., *Punch Card Machine Methods Applied to the Solution of the Torsion Problem*, Quart. appl. Math. 5, 69—81 (1947).
- [12] BERKELEY, E. C., *Giant Brains or Machines that Think* (John Wiley & Sons, New York 1949), 270 S.
- [13]<sup>+</sup> BIGELOW, J. H., PANAGOS, P., RUBINOFF, M., und WARE, W. H., *First Progress Report on a Multichannel Magnetic Drum* (Institute for advanced Study, Princeton, N. J., 1948).
- [14] BIRKHOFF, G., *Lattice Theory* (The American Mathematical Society, New York, 1948), 283 S.
- [15] BLOCH, R. M., CAMPBELL, R. V. D., und ELLIS, M., *The Logical Design of the Raytheon Computer*, MTAC 3, 286—295 (1948).
- [16] BLOCH, R. M., CAMPBELL, R. V. D., und ELLIS, M., *General Design Considerations for the Raytheon Computer*, MTAC 3, 317—323 (1948).
- [17] BOOTH, A. D., *A Magnetic Digital Storage System*, Electronic Eng. 21, 234—238 (1949).
- [18] BROWN, D. R., *Rectifier Networks for Multiposition Switching*, Proc. Inst. Radio Eng. 37, 139 (1949/I).
- [19] BURKS, A. W., *Electronic Computing Circuits of the ENIAC*, Proc. Inst. Radio Eng. 35, 756—767 (1947/II).

<sup>1)</sup> Wird im Laufe des Jahres 1951 erscheinen.

<sup>2)</sup> Die mit + bezeichneten Arbeiten sind nicht allgemein zugänglich.

<sup>3)</sup> MTAC = Mathematical Tables and other Aids to Computation.

- [20]<sup>+</sup> BURKS, A. W., GOLDSTINE, H. H., und v. NEUMANN, J., *Preliminary Discussions of an Electronic Computing Instrument* (Institute for Advanced Study, Princeton, N. J., 1947), 42 S.
- [21] DUSCHEK, A., *Über eine neue Art von algebraischen Bereichen*, Mh. Math. 52, 89–123 (1948).
- [22] COHEN, A. A., *Magnetic Drum Storage for Digital Information Processing System*, MTAC 4, 31–39 (1950).
- [23] ECKERT, W. J., *Punched Card Methods in Scientific Computation* (Watson Laboratory [IBM], New York, 1946), 136 S.
- [24]<sup>+</sup> GOLDSTINE, H. H., und v. NEUMANN, J., *Planning and Coding for an Electronic Computing Instrument*. Bd. 1 (69 S.), Bd. 2 (68 S.), Bd. 3 (23 S.) (Institute for Advanced Study, Princeton, N. J. 1947/48).
- [25] HAEFF, A. V., *The Memory Tube and its Application to Electronic Computation*, MTAC 3, 281–286 (1948).
- [26] HAMMING, R. W., *Error Detecting and Error Correcting Codes*, The Bell Telephone System Technical Journal 26, 147–160 (1950).
- [27] HARRISON, J. O., *Piecewise Polynomial Approximation for Large-Scale Digital Calculators*, MTAC 3, 400–407 (1949).
- [28] HARTREE, D. R., *Computing Machines and Instruments* (University of Illinois Press, Urbana, Ill., 1949), 147 S.
- [29] HILBERT, D., und ACKERMANN, W., *Grundzüge der theoretischen Logik*, 2. Aufl. (Springer, Berlin 1938), 135 S.
- [30] HUNTINGTON, E. M. S. und HUGHES, *Ultrasonic Delay Lines*, J. Franklin Inst. 245, 1–23 und 101–115 (1948).
- [31] HUSKEY, H. D., *Characteristics of the Institute for Numerical Analysis Computer*, MTAC 4, 103–108 (1950).
- [32] *IBM-Selective Sequence Electronic Calculator Is Dedicated to the Aid of Science*, Business Machines (IBM-Zeitung), Montag, 15. März 1948 (12 S.).
- [33] KILBURN, T., *The University of Manchester Universal High Speed Digital Computing Machine*, Nature 164, 684–687 (1949).
- [34] KOONS, L., und LUBKIN, S., *Conversion of Numbers from Decimal to Binary Form in the EDVAC*, MTAC 3, 426–431 (1949).
- [35] LUBKINS, S., *Decimal Point Location in Computing Machines*, MTAC 3, 44–50 (1948).
- [36] LYNDON, R. C., *The Zuse Computer*, MTAC 2, 355–359 (1947).
- [37] MCPHERSON, J. L., *Applications of Large Scale Computing Machines to Statistical Work*, MTAC 3, 121–126 (1948).
- [38] METROPOLIS, N., und ULAM, S., *The Monte Carlo Method*, J. Am. statist. Ass. 44, 335–341 (1949).
- [39]<sup>+</sup> *Theory and Techniques for Design of Electronic Digital Computers* (Lectures given at the Moore School, July 8 to August 31, 1946). Bde. 1–4 (total zirka 600 S. hektographiert) (University of Pennsylvania, Moore School of Electrical Engineering, Philadelphia, 1946).
- [40] v. NEUMANN, J., und GOLDSTINE, H. H., *Inverting of Matrices of High Order*, Bull. Am. Math. Soc. 53, 1021–1099 (1947).
- [41] PAGE, C. H., *Digital Computer Switching Circuits*, Electronics 21, 110–118 (1948).
- [42] PARSONS, J. H., *Electronic Classifying, Cataloging, and Counting Systems*, Proc. Inst. Radio Eng. 37, 564–568 (1949).

- [43] PLECHL, O., und DUSCHEK, A., *Grundzüge einer Algebra der elektrischen Schaltungen*, Öster. Ing. Arch. 1946.
- [44] PÉRÈS, J., BRILLOUIN, L., und COUFFIGNAL, L., *Les grandes machines mathématiques*, Annal. Télécommun. 1948.
- [45] RAJCHMAN, J. A., *The Selectron*, MTAC 2, 359–361 (1947).
- [46] REITWIESNER, G. W., *An ENIAC Determination of  $\pi$  and  $e$  to more than 2000 Decimal Places*, MTAC 4, 11–15 (1950).
- [47] RUTISHAUSER, H., *Die neueste elektronische Rechenmaschine (Mark III)*, Neue Zürcher Zeitung (Mittwoch, 26. April 1950, Blatt 5).
- [48] SHANNON, C. E., *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*, Trans. Am. Inst. electr. Eng. 57, 713–723 (1938).
- [49] SHARPLESS, T. K., *High Speed N-Scale Counters*, Electronics 21, 122–125 (1948).
- [50]<sup>+</sup> SMITH, C. V. L., *Mathematical Aspects of Computing Machines*, Monthly Research Reports of the Office of Naval Research. August 1948, S. 13–17.
- [51] SNYDER, F. E., und LIVINGSTONE, H. M., *Coding of a Laplace Boundary Value Problem for the UNIVAC*, MTAC 3, 341–350 (1949).
- [52] *Proceedings of a Symposium on Large Scale Digital Computing Machinery* (Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Bd. 16) (Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1948), 302 S.
- [53] *Proceedings of the Second Symposium (September 1949) on Large Scale Digital Computing Machinery* (Annals of the Computation Laboratory of the Harvard University<sup>1)</sup>).
- [54] TODD, J., *Solution of Differential Equations by Recurrence Relations*, MTAC 4, 39–44 (1950).
- [55] WEST, C. F., und DETURK, J. E., *A Digital Computer for Scientific Applications*, Proc. Inst. Radio Eng. 36, 1452–1460 (1948).
- [56] WIENER, N., *Cybernetics* (John Wiley & Sons, New York 1949), 194 S.
- [57] WILKES, M. V., *The ENIAC*, Electronic Eng. 19, 104–108 (1947).
- [58] WILKES, M. V., und RENWICK, W., *An Ultrasonic Memory Unit for the EDSAC*, Electronic Instr. 20, 208–213 (1948).
- [59] WILKES, M. V., *Programme Design for a High Speed Automatic Calculating Machine*, J. sci. Instr. Physics Ind. 26, 217–220 (1949).
- [60] WILKES, M. V., *Electronic Calculating Machine Development in Cambridge*, Nature 164, 557–558 (1949).
- [61] WILKES, M. V., und RENWICK, W., *The EDSAC, an Electronic Calculating Machine*, J. sci. Instr. Physics Ind. 26, 385–391 (1949).
- [62] WILKES, M. V., und RENWICK, W., *The EDSAC*, MTAC 4, 61–65 (1950).
- [63] WILLIAMS, F. C., und KILBURN, T., *A Storage System for Use with Binary Digital Computing Machines*, Proc. Inst. electr. Eng. 96/III, 81–100 (1949).
- [64] WOO, W. D., und WANG, A. W., *Static Magnetic Storage and Delay Line*, J. appl. Phys. 27, 49–54 (1950).
- [65] ZUSE, K., *Über den allgemeinen Plankalkül als Mittel zur Formulierung schematisch kombinatorischer Aufgaben*, Arch. Math. 1, 441–449 (1948/49).
- [66] ZUSE, K. (Beschreibung des Rechenggerätes von Zuse) Der Wirtschaft Spiegel, Technisches Sonderheft, März 1948.
- [67] ZUSE, K., Verschiedene unveröffentlichte Mitteilungen.

<sup>1)</sup> Wird Ende 1950 oder anfangs 1951 erscheinen.

Fortsetzung folgt in ZAMP I/6.



# Beiträge zur Hitzdrahtmethode

VON G. DÄTWYLER, Zürich

## 1. Die angenäherte Vorausberechnung der Betriebsdaten von Hitzdrahtsonden

Bis heute bestand in dieser Meßtechnik insofern eine Lücke, als es nicht möglich war, den Betriebszustand eines gegebenen Drahtes für gegebene Betriebsbedingungen vorauszuberechnen. Ferner fehlte die Möglichkeit, den Einfluß des Drahtmaterials sowie des Drahtdurchmessers auf diese Betriebseigenschaften klar zu erkennen.

Die nachfolgenden Ausführungen sollen diese Lücke schließen helfen. Sie stellen insofern nur eine Näherung dar, als Wärmeverluste weder durch Ableitung an den Enden noch durch Strahlung berücksichtigt sind. Bei den praktisch vorkommenden Temperaturen sind die Strahlungsverluste prozentual gering. Die Endeinflüsse sind durch БЕТЧОВ<sup>1)</sup> berechnet worden. Die nachfolgenden Resultate gelten somit eigentlich für endlich lange Ausschnitte aus unendlich langen Drähten mit konstanter Temperatur längs ihrer Achse.

Die Berechnungen gehen aus von der Wärmebilanz des Drahtes

$$0,239 I^2 R = \zeta \pi D L (t - t_a) ,$$

worin

$\zeta = Nu \lambda_m / D$  = Wärmeübergangszahl, Mittelwert für den Drahtumfang

$\lambda$  = Wärmeleitfähigkeitszahl der Luft

$D$  = Drahtdurchmesser

$Nu$  = Nusseltsche Kennzahl =  $c_0 (Re)^n$

$Re$  = Reynoldssche Kennzahl =  $U D / \nu_m$

$U$  = Strömungsgeschwindigkeit

$\nu$  = kinematische Zähigkeit der Luft =  $\eta / \rho$

$\rho$  = Luftdichte

$\eta$  = dynamische Zähigkeit der Luft.

Der Index  $m$  weist darauf hin, daß die betreffende Größe mit ihrem Integralmittelwert zwischen den Temperaturgrenzen

$t$  = Temperatur des Drahtes

$t_a$  = Temperatur der Luft (Index  $a$ )

<sup>1)</sup> R. БЕТЧОВ, *L'influence de la conduction thermique sur les anémomètres à fils chauds*, Proc. Koninkl. nederl. Akad. Wetensch. 51, Nr. 6, 721–730 (1948).

einzuführen ist, z. B.

$$\lambda_m = \frac{1}{t - t_a} \int_{t_a}^t \lambda \, dt.$$

Die in der obenerwähnten Beziehung

$$Nu = c_0 (Re)^n$$

auftretenden Konstanten  $c_0$  und  $n$  sind von der Größenordnung der Reynolds-

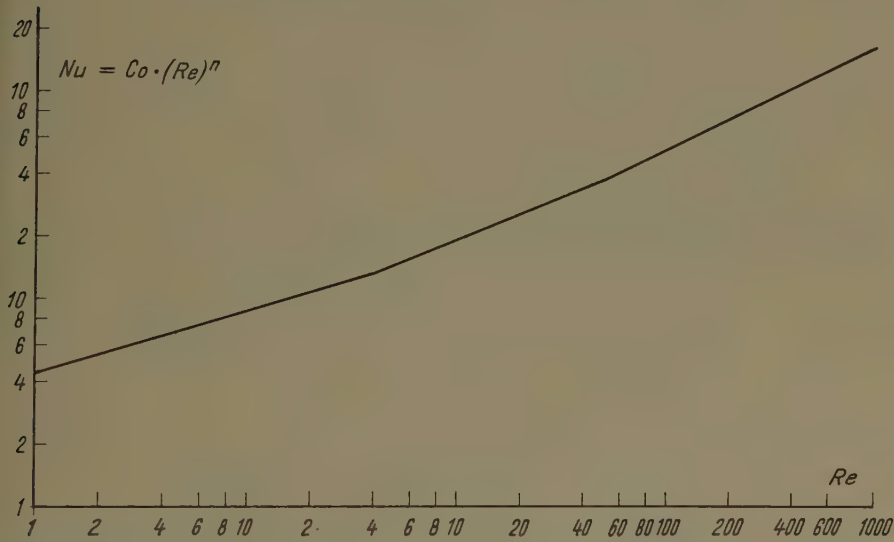


Fig. 1

schen Zahl abhängig. ULSAMER<sup>1)</sup> gibt dafür die Werte

$Re$	$c_0$	$n$
0,1 bis 4	0,875	0,305
4 bis 50	0,764	0,41
50 bis 1000	0,537	0,50

Der Wert  $n = 0,50$  ist aus der Kingtons Gleichung wohlbekannt<sup>2)</sup>. Fig. 1 veranschaulicht die Beziehung  $Nu = c_0 (Re)^n$  im angeführten Bereich.

<sup>1)</sup> J. ULSAMER, Die Wärmeabgabe eines Drahtes oder Rohres an einen senkrecht zur Achse strömenden Gas- oder Flüssigkeitsstrom, Forschung 3, H. 2, 94–98 (März/April 1932).

<sup>2)</sup> Siehe z. B. J. M. BURGERS, Hitzdrahtmessungen, in: WIEN-HARMS, Handbuch der Experimentalphysik, Bd. 4, 1. Teil (1931), S. 637–667.

1. Berechnung des Heizstromes  $I$ 

Aus den Beziehungen

$$0,239 I^2 R = \zeta \pi D L (t - t_a)$$

$$\zeta = Nu \frac{\lambda_m}{D}$$

$$R = \frac{r_0 L}{\pi D^2/4} (1 + \alpha_0 t)$$

folgt

$$I = \frac{\pi D}{2} \sqrt{\frac{\lambda_m Nu (t - t_a)}{0,239 r_0 (1 + \alpha_0 t)}},$$

wo

$r_0$  = spezifischer Widerstand des Hitzdrahtmaterials bei  $0^\circ\text{C}$  (Index 0)

$L$  = Länge des Hitzdrahtes

$\alpha_0$  = Temperaturkoeffizient des Widerstandes des Hitzdrahtmaterials, auf die Temperatur  $0^\circ\text{C}$  bezogen.

Bei gegebenen Werten  $t$  und  $t_a$  sind für einen Draht vom Durchmesser  $D$ , aus einem durch die Werte  $r_0$  und  $\alpha_0$  charakterisierten Material, die Werte  $\lambda_m$ ,  $Re$  und  $Nu$  für jeden Wert von  $U$  gegeben, so daß  $I$  berechnet werden kann.

2. Spannungsabfall  $E/L$  pro Längeneinheit des Drahtes

Aus

$$E = I R$$

ergibt sich

$$\frac{E}{L} = \frac{2}{D} \sqrt{\frac{\lambda_m Nu (t - t_a) (1 + \alpha_0 t) r_0}{0,239}}.$$

Falls der Strom  $I$  schon bekannt ist, dann ist es bei gegebener Temperatur  $t$  des Hitzdrahtes einfacher, den Quotienten  $E/L$  aus der Beziehung

$$\frac{E}{L} = \frac{R}{L} I = \frac{r_0 (1 + \alpha_0 t) I}{\pi D^2/4}$$

zu berechnen.

3. Zeitkonstante  $M$ 

Aus der Beziehung<sup>1)</sup>

$$M = \text{const } \alpha \frac{dR/dI}{E}$$

und der etwas umgeformten Wärmebilanzgleichung

$$I^2 = \text{const } \zeta \frac{R - R_a}{R}$$

<sup>1)</sup> G. DÄTWYLER, *Détails théoriques et pratiques de la méthode du fil chaud*, Congr. nat. Aviation franç. 1946, Rapport Nr. 42/500, S. 7.



folgt nach Differentiation

$$\frac{dR}{dI} = \frac{2E}{\text{const} \left[ \zeta \frac{R_a}{R} + \frac{d\zeta}{dR} (R - R_a) \right]}.$$

Mit

$$\zeta = c_0 \frac{(U D)^n}{D} \cdot \frac{\lambda_m}{(v_m)^n}$$

und den Näherungen (siehe Fig. 2 und 3)

$$\lambda_m = \lambda_a + a (t - t_a) = \lambda_0 + a (t + t_a)$$

$$v_m = v_a + b (t - t_a) = v_0 + b (t + t_a),$$

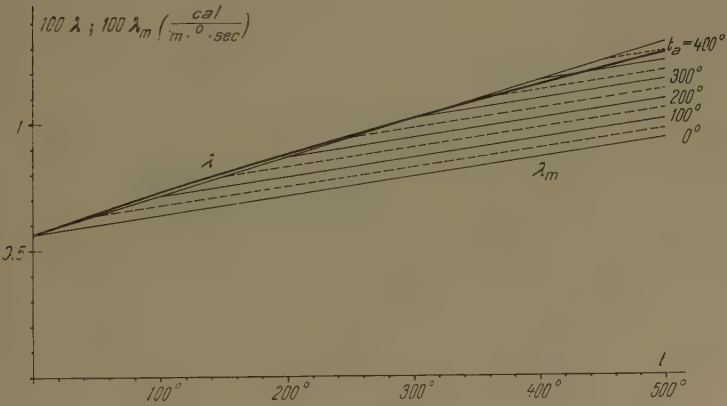


Fig. 2

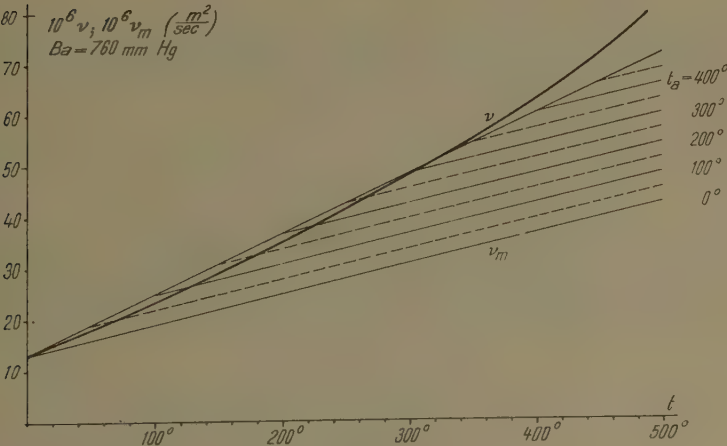


Fig. 3

ergibt sich

$$\zeta = \frac{c_0 (UD)^n}{D} \cdot \frac{\lambda_a + \frac{a}{\alpha_0} \cdot \frac{R - R_a}{R_0}}{\left( \nu_a + \frac{b}{\alpha_0} \cdot \frac{R - R_a}{R_0} \right)^n}.$$

Daraus der Differentialquotient

$$\frac{d\zeta}{dR} = \frac{\zeta}{\alpha_0 R_0} \left( \frac{a}{\lambda_m} - \frac{n b}{\nu_m} \right),$$

und weiter

$$\frac{dR}{dI} = \frac{2E}{\text{const } \zeta \left[ \frac{R_a}{R} + \frac{R - R_a}{\alpha_0 R_0} \left( \frac{a}{\lambda_m} - \frac{n b}{\nu_m} \right) \right]}.$$

Nach Ersatz von  $R$  durch  $t$  und von  $\zeta$  durch  $\lambda_m$  und  $Nu$ , folgt

$$M = \frac{\left( \frac{D}{2} \right)^2 \gamma s}{\lambda_m Nu \left[ 1 - (t - t_a) \left( \frac{\alpha_0}{1 + \alpha_0 t} - \frac{a}{\lambda_m} + \frac{n b}{\nu_m} \right) \right]},$$

wo

$\gamma$  = spezifisches Gewicht des Hitzdrahtmaterials,

$s$  = spezifische Wärme des Hitzdrahtmaterials.

Für ganz schwach geheizte Drähte, d. h. für  $I \rightarrow 0$  bzw.  $t \rightarrow t_a$ , ergibt sich

$$M_a = \frac{\left( \frac{D}{2} \right)^2 \gamma s}{\lambda_a Nu_a}.$$

Dieser Wert ist von Bedeutung bei der Messung von *Temperaturschwankungen* in Strömungen, wobei der Draht die Empfindlichkeit

$$\frac{dE_a}{dt_a} = I R_a \alpha_a$$

besitzt.

Die direkte Lösung des Problems, für einen gegebenen Draht im Luftstrom  $U$  die Werte  $E/L$  und  $M$  in Funktion des Stromes  $I$  zu berechnen, ist umständlich. Schon die Berechnung der Temperatur  $t$  in Funktion des Stromes  $I$  führt auf eine unübersichtliche Beziehung. Es ist deshalb einfacher, den Wert der Temperatur  $t$  durch Probieren aus der Beziehung

$$t = \frac{t_a + \frac{0,239 r_0 I^2}{\lambda_m Nu (\pi D/2)^2}}{1 - \alpha_0 \frac{0,239 r_0 I^2}{\lambda_m Nu (\pi D/2)^2}}$$

zu berechnen, wobei man mit geschätzten Werten für  $\lambda_m$  und  $Nu$  beginnt, wenn nötig iteriert, um schließlich die Größen  $E/L$  und  $M$  nach obigem zu bestimmen.

#### 4. Die Empfindlichkeit $dE/dU$

Mit den bekannten Beziehungen für  $E/L$ ,  $Nu$  und  $R = R(t)$  erhält man

$$U = \text{const } v_m \left( \frac{R}{\lambda_m (R - R_a)} \right)^{1/n}$$

und

$$\frac{dU}{dR} = \frac{U}{\alpha_0 R_0 n} \left[ \frac{n b}{v_m} - \frac{a}{\lambda_m} - \frac{(1 + \alpha_0 t_a)}{(1 + \alpha_0 t) (t - t_a)} \right].$$

Da  $I = \text{konstant}$  vorausgesetzt ist, wird

$$\frac{dE}{dU} = \frac{1}{\frac{dU}{dE}} = \frac{1}{\frac{dU}{I dR}} = \frac{I}{dR},$$

und somit

$$\frac{dE}{dU} = \frac{E}{U} \cdot \frac{\frac{\alpha_0 n}{1 + \alpha_0 t}}{\frac{n b}{v_m} - \frac{a}{\lambda_m} - \frac{1 + \alpha_0 t_a}{(1 + \alpha_0 t) (t - t_a)}}$$

oder

$$\varepsilon = \frac{\frac{dE}{E}}{\frac{dU}{U}} = \frac{\frac{\alpha_0 n}{1 + \alpha_0 t}}{\frac{n b}{v_m} - \frac{a}{\lambda_m} - \frac{1 + \alpha_0 t_a}{(1 + \alpha_0 t) (t - t_a)}}.$$

#### 5. Einfluß des Drahtmaterials und -durchmessers

Mit den obigen Ausdrücken läßt sich auch der Einfluß anderen Drahtmaterials oder eines anderen Drahtdurchmessers auf die Betriebsdaten von Hitzdrahten bestimmen.

Hier seien bloß die Beziehungen für verschiedene Drahtdurchmesser aufgeführt, die dann besonders einfach und übersichtlich sind, wenn für beide Drahtdurchmesser der gleiche Reynolds-Zahl-Bereich gilt.

a) Strom  $I$ :  $\frac{I_2}{I_1} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^{1+n/2};$

b) Spannung  $E$ :  $\frac{E_2}{E_1} = \left( \frac{D_1}{D_2} \right)^{1-n/2};$

c) Zeitkonstante  $M$ :  $\frac{M_2}{M_1} = \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^{2-n};$

d) Empfindlichkeit  $\varepsilon$ :  $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = 1.$



Das heißt, daß für jeden der drei in Fig. 1 und der zugehörigen Tabelle angeführten Bereiche der Reynolds-Zahl diese «relative Empfindlichkeit»  $\varepsilon$  vom Drahtdurchmesser unabhängig ist.

## 2. Eine praktische und genauere Methode zur experimentellen Bestimmung der Hitzdrahtempfindlichkeit bei Turbulenzmessungen

Im Bestreben, bei Turbulenzmessungen die Empfindlichkeit der Hitzdrahtsonde auf möglichst einfache Art direkt an der Meßstelle zu bestimmen, hat der Verfasser in einer früheren Veröffentlichung<sup>1)</sup> die Beziehung

$$u' = \frac{4e}{I^2 \left( \frac{\partial R}{\partial I} \right)_U \left( 1 - \frac{(EI)_0}{EI} \right)}$$

abgeleitet. Neben schon bekannten Symbolen bedeuten darin

$u' = \sqrt{u'^2}/U$  = quadratischer Mittelwert der turbulenten Schwankungen (Längskomponente)

$u$  = Momentanwert der Schwankungen

$e$  = Effektivwert der elektrischen Spannungsschwankungen des Hitzdrahtes

$EI$  = dem Hitzdraht zugeführte Heizleistung im Winde  $U$

$(EI)_0$  = dem Hitzdraht zugeführte Heizleistung bei abgestelltem Winde ( $U = 0$ ), bei gleicher Hitzdrahttemperatur bzw. gleichem Widerstand wie im Wind.

Diese Beziehung erlaubt, die Empfindlichkeit  $\partial R/\partial I$  durch Änderungen des Heizstromes  $I$  zu bestimmen und beseitigt so die bisher übliche umständliche Eichung durch Änderungen der Windgeschwindigkeit  $U$ , die meistens einen besonderen Eichkanal verlangte. Bei der neuen Methode braucht die Windgeschwindigkeit überhaupt nicht bekannt zu sein.

Nachfolgend soll ein Weg beschrieben und begründet werden zur einfachen und raschen experimentellen Bestimmung des Quotienten  $\partial R/\partial I$ , der vor allem auch ein genaueres Resultat ergibt als etwa der aus kleinen Änderungen  $\Delta I$  des Heizstromes berechenbare Differenzenquotient  $\Delta R/\Delta I$ .

Zur Ableitung obiger Auswertungsformel war die Wärmebilanz für Hitzdrähte in Form der *vollständigen Kingschen Gleichung* (siehe Fußnote 2, S. 299).

$$I^2 R = \{A [1 + a (t - t_a)] + B [1 + b (t - t_a)] \sqrt{U}\} (t - t_a)$$

<sup>1)</sup> G. DÄTWYLER, *Zwei Beiträge zur Hitzdraht-Meßmethode*, Helv. Phys. Acta 15, H. 3, 266 bis 277 (1942).

benützt worden, mit den Konstanten  $A$ ,  $a$ ,  $B$  und  $b$ . Oft wird die *lineare KINGSche Gleichung*

$$I^2 R = (A + B \sqrt{U}) (t - t_a)$$

benützt, die für begrenzte Bereiche von  $U$  gilt.

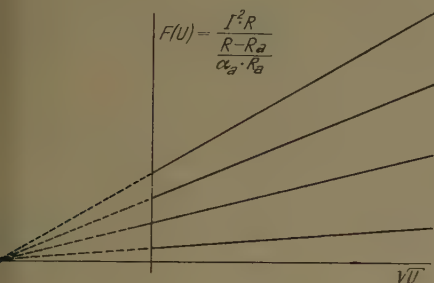


Fig. 4

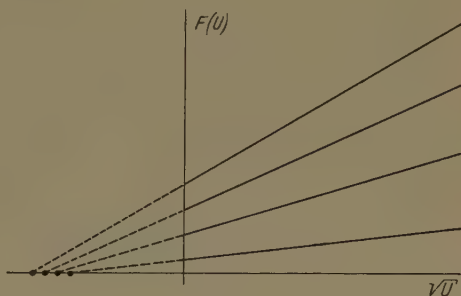


Fig. 5

Die Konstanten  $a$  und  $b$  der KINGSchen Gleichung sind von verschiedener Größenordnung. KING hat auf theoretischem Wege die Werte abgeleitet

$$a = 0,00114 ,$$

$$b = 0,00008 .$$

Es erscheint somit angebracht, im für Hitzdrähte praktisch zulässigen Temperaturbereich  $t \leq 700^\circ \text{C}$   $b$  gegenüber  $a$  zu vernachlässigen. So ergibt sich die *erweiterte KINGSche Gleichung*

$$I^2 R = \{A [1 + a (t - t_a)] + B \sqrt{U}\} (t - t_a) .$$

Mit

$$R = R_a [1 + \alpha_a (t - t_a)]$$

folgt daraus

$$I^2 R = \left\{ A \left( 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{R - R_a}{R_a} \right) + B \sqrt{U} \right\} \frac{R - R_a}{\alpha_a R_a} .$$

In graphischer Darstellung ergibt die lineare Gleichung mit  $R = \text{const}$  als Parameter das Geradenbüschel der Fig. 4, während die erweiterte Gleichung die Geradenschar der Fig. 5 liefert.

Aus den beiden Varianten der KINGSchen Gleichung läßt sich nun der Differentialquotient  $\partial R / \partial I$  wie folgt berechnen.

a) Aus der *linearen* Gleichung ergibt sich

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2 E}{I^2} \cdot \frac{R - R_a}{R_a} .$$

Der Quotient  $(R - R_a)/R_a$  wird nun wie folgt bestimmt<sup>1)</sup>.

Aus den Kingtons Gleichungen für zwei Heizströme  $I$  und  $I^*$  folgt

$$R_a = \frac{E^* I^* \frac{E}{I} - E I \frac{E^*}{I^*}}{E^* I^* - E I}.$$

Mit der wohl einfachsten Wahl

$$I^* = \frac{I}{2}$$

vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$R_a = \frac{3 R}{2 \varepsilon - 1},$$

wo

$$\varepsilon = \frac{E}{E^*} \geq 2.$$

Daraus folgt die einfache Beziehung

$$\frac{R - R_a}{R_a} = \frac{2}{3} (\varepsilon - 2)$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{4 R}{3 I} (\varepsilon - 2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{E}{I^2} (\varepsilon - 2).$$

Die Auswerteformel lautet somit

$$u' = \frac{3 \varepsilon}{E} \cdot \frac{1}{(\varepsilon - 2) \left[ 1 - \frac{(E I)_0}{E I} \right]}.$$

Mit

$$\frac{(E I)_0}{E I} = \left( \frac{I_0}{I} \right)^2$$

folgt schließlich

$$u' = \frac{3 \frac{e}{E}}{(\varepsilon - 2) \left[ 1 - \left( \frac{I_0}{I} \right)^2 \right]}.$$

Den Zusammenhang  $I_0(R)$  bei abgestelltem Wind ( $U = 0$ ) nimmt man praktischerweise für den gesamten Bereich des Widerstandes  $R$  ein für allemal auf. Dabei ist zu beachten, daß Druck und Temperatur der Luft bei abgestelltem Wind gleich sind wie (im Stauzustand) beim Messen. Hievon abweichende Fälle werden später besprochen.

<sup>1)</sup> Nach einem Vorschlag von W. AMREIN, Zürich.



b) Die *erweiterte* Gleichung und der daraus gleich wie oben abgeleitete Differentialquotient

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2 E}{I^2} \cdot \frac{R - R_a}{R_a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{I^2} \left( \frac{R - R_a}{R_a} \right)^2 \frac{A a}{\alpha_a^2 R_a}}$$

werden dadurch *linearisiert*, daß das Zusatzglied von  $A$  mit Hilfe des oben gefundenen Ausdruckes

$$\frac{R - R_a}{R_a} = \frac{2}{3} (\varepsilon - 2)$$

angenähert wird. Es wird später gezeigt, daß dies eine sehr gute Näherung ist. Dies führt auf

$$I^2 R = \left\{ A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] + B \sqrt{U} \right\} \frac{R - R_a}{R_a}$$

und

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2 E}{I^2} \cdot \frac{R - R_a}{R_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{I^2} \left[ \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right]^2 \frac{A a (2 \varepsilon - 1)}{\alpha_a^2 3 R}}$$

Den noch verbliebenen Ausdruck  $(R - R_a)/R_a$  bestimmt man wie früher aus

$$I^2 R = E I = \left\{ A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] + B \sqrt{U} \right\} \frac{R - R_a}{\alpha_a R_a},$$

$$\left( \frac{I}{2} \right)^2 R^* = E^* \frac{I}{2} = \left\{ A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon^* - 2) \right] + B \sqrt{U} \right\} \frac{R^* - R_a}{\alpha_a R_a}.$$

Es ist

$$\varepsilon^* - 2 = \frac{E^*}{E^{**}} - 2,$$

wobei  $E^{**}$  analog zu  $E^*$  dem Werte  $I^{**} = I^*/2 = I/4$  zugeordnet ist.  $\varepsilon^*$  kann *rechnerisch* wie folgt aus der linearen Kingschen Gleichung durch einen Ausdruck mit  $\varepsilon$  ersetzt werden.

Es ist

$$E I = F(U) \frac{R - R_a}{R_a} = F(U) \frac{2}{3} (\varepsilon - 2),$$

$$E^* \left( \frac{I}{2} \right) = F(U) \frac{R^* - R_a}{R_a} = F(U) \frac{2}{3} (\varepsilon^* - 2).$$

Daraus

$$\varepsilon^* - 2 = \frac{\varepsilon - 2}{2 \varepsilon}$$

und

$$\frac{R^* - R_a}{R_a} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon - 2}{2 \varepsilon} = \frac{1}{2 \varepsilon} \cdot \frac{R - R_a}{R_a}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$I^2 R = \left\{ A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] + B \sqrt{U} \right\} \frac{R - R_a}{\alpha_a R_a},$$

$$\left( \frac{I}{2} \right)^2 R^* = E^* \frac{I}{2} = \left\{ A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon - 2}{2 \varepsilon} \right] + B \sqrt{U} \right\} \frac{R^* - R_a}{\alpha_a R_a}.$$

Zur Abkürzung sei gesetzt

$$A \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] = \mathfrak{A},$$

$$A \left( 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon - 2}{2 \varepsilon} \right) = \mathfrak{A} - \delta.$$

Somit

$$E I = (\mathfrak{A} + B \sqrt{U}) \frac{R - R_a}{\alpha_a R_a},$$

$$E^* I = 2 (\mathfrak{A} - \delta + B \sqrt{U}) \frac{R^* - R_a}{\alpha_a R_a}.$$

Mit

$$\mathfrak{A} + B \sqrt{U} = \mathfrak{E} = \frac{I^2 R \alpha_a}{R - R_a}$$

folgt

$$E I = \mathfrak{E} \frac{R - R_a}{\alpha_a R_a},$$

$$E^* I = 2 (\mathfrak{E} - \delta) \frac{R^* - R_a}{\alpha_a R_a}.$$

Daraus

$$R_a = \frac{R \left[ 2 \varepsilon \left( 1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}} \right) \left( \frac{R^*}{R} \right) - 1 \right]}{2 \varepsilon \left( 1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}} \right) - 1}.$$

Da nach dem Ohmschen Gesetz

$$\frac{R^*}{R} = \frac{2}{\varepsilon},$$

ergibt sich schließlich

$$R_a = \frac{3 R}{2 \varepsilon - 1} \cdot \frac{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}{1 - \frac{\delta / \mathfrak{E}}{1 - [1 / (2 \varepsilon)]}}$$

mit

$$0 \leq \frac{\delta}{\mathfrak{E}} \leq 0,25.$$

Im linearen Fall ( $\delta = 0$ ) folgt daraus die schon bekannte Beziehung. Der Aus-

druck  $(R - R_a)/R_a$  wird nun

$$\frac{R - R_a}{R_a} = \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}},$$

der für den linearen Fall auch wieder in die früher abgeleitete Beziehung übergeht. Fig. 6 zeigt  $(R - R_a)/R_a$  in Funktion von  $\varepsilon$  für die Extremfälle  $(I_0/I)^2 = 0$

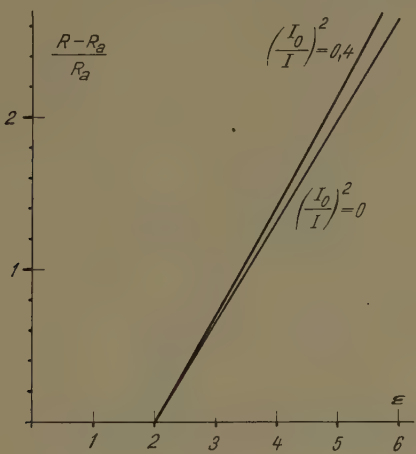


Fig. 6

und 0,4. Daraus geht hervor, daß die lineare Näherung recht gut ist, wie früher schon erwähnt wurde.

Der Differentialquotient  $\partial R/\partial I$  lautet somit

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2 E}{I^2} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}} \cdot \frac{1}{1 + \left[ \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right]^2 \frac{A}{I^2} \frac{a}{\alpha_a^2} \frac{(2\varepsilon - 1)}{3 R}}.$$

Den Ausdruck  $A/R$  rechts im Nenner bestimmt man aus

$$\frac{A}{R} = \frac{\alpha_a I_0^2}{\left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] \frac{2}{3} (\varepsilon - 2)}.$$

Somit

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2 E}{I^2} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{a (2\varepsilon - 1) I_0^2}{3 \alpha_a \left[ 1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \right] I^2}}.$$



Nun ist noch der Nenner

$$1 + \left(\frac{I_0}{I}\right)^2 \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2\varepsilon \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}\right)}{1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2)} = \left[1 + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\right].$$

Also

$$\frac{\partial R}{\partial I} = \frac{2E}{I^2} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2) \frac{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}{1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\delta}{\mathfrak{E}}},$$

und die Auswerteformel lautet schließlich

$$u' = \frac{3 \frac{e}{E}}{(\varepsilon - 2) \left[1 - \left(\frac{I_0}{I}\right)^2\right]} \cdot \frac{\left[1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\right] \left[1 + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\right]}{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}.$$

Der Quotient  $\delta/\mathfrak{E}$  lautet nach Einsetzen aller Größen

$$\frac{\delta}{\mathfrak{E}} = \left(\frac{I_0}{I}\right)^2 \cdot \frac{1 - \frac{1}{2\varepsilon}}{1 + \frac{a}{\alpha_a} \cdot \frac{2}{3} (\varepsilon - 2)}.$$

Er ist in Fig. 7 für Platindrähte bei  $t_a = 20^\circ\text{C}$  aufgetragen. Der dabei eingetragte Wert  $a = 0,213$  ist das Resultat zahlreicher Messungen von  $I_0$  mit Platindrähten.

Der «lineare» Ausdruck

$$u' = \frac{3 \frac{e}{E}}{(\varepsilon - 2) \left[1 - \left(\frac{I_0}{I}\right)^2\right]}$$

ist demnach mit dem Korrekturfaktor

$$f_1 = \frac{\left(1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\right) \left(1 + \frac{2}{3} \varepsilon \frac{\delta}{\mathfrak{E}}\right)}{1 - \frac{\delta}{\mathfrak{E}}}$$

[siehe Fig. 8 (gültig für Pt-Drähte bei  $t_a = 20^\circ\text{C}$ )] zu multiplizieren, um den genaueren Wert entsprechend der erweiterten Kingschen Gleichung zu ergeben.

Da auch im Ausdruck für die Zeitkonstante  $M$  der Quotient  $\partial R/\partial I$ , und zwar im Zähler, vorkommt, ergibt sich für den «linearen» Wert von  $M$  die Korrektur  $1/f_1$ . Ein analoges Ergebnis hat auch BETCHOV<sup>1)</sup> gefunden.

<sup>1)</sup> R. BETCHOV, *Théorie non-linéaire de l'anémomètre à fil chaud*, Proc. Koninkl. nederl. Akad. Wetensch. 52, Nr. 3, 195–207 (1941).

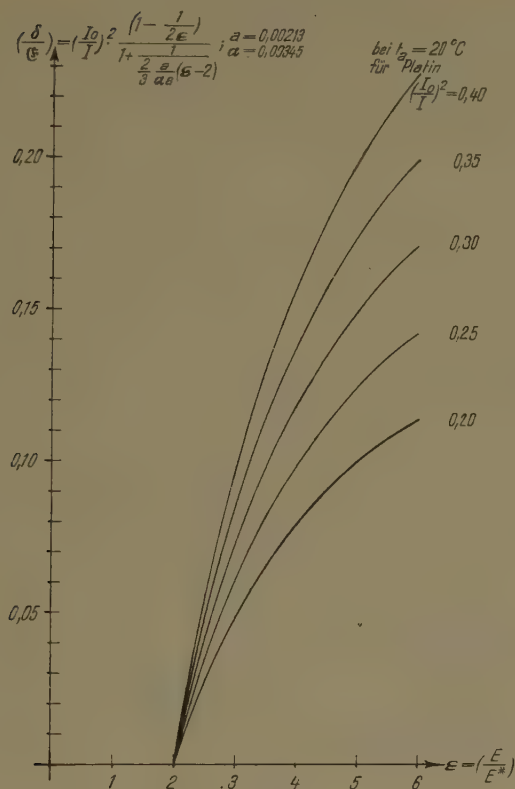


Fig. 7

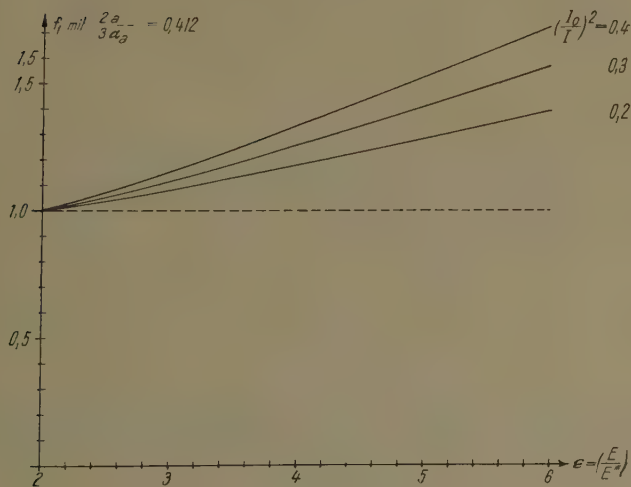


Fig. 8





die Kurven

$$\kappa = \frac{4 [1 + \Lambda (p - 1)]}{(p - 1) (1 - \Lambda)}$$

wiedergegeben, und zwar bis zu  $E = 1,2 \text{ V}$ , d. h.  $\Lambda = 0,19355$ .

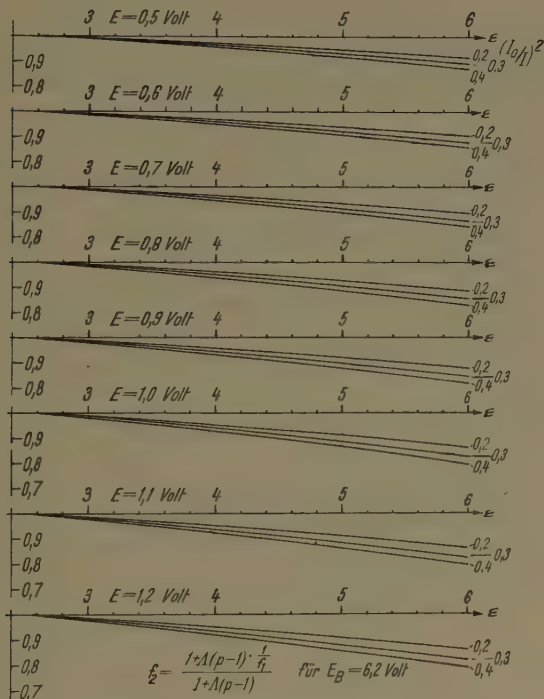


Fig. 10

Da hier die Größe  $p - 1$  zweimal vorkommt, sind entsprechend auch zwei Korrekturen für den Übergang zum vollständigen Resultat von  $u'$  anzubringen. Der Faktor  $f_1$  von früher wird einmal direkt auf den Nennerausdruck  $p - 1$  angewendet, dann aber auch noch im Zählerglied  $\Lambda (p - 1)$ , was zur zweiten Korrektur

$$f_2 = \frac{1 + \Lambda (p - 1) \frac{1}{f_1}}{1 + \Lambda (p - 1)}$$

führt. Diese ist, ebenfalls für  $E_B = 6,2 \text{ V}$ , in Fig. 10 aufgetragen.

Aus diesen beiden Korrekturen ergibt sich das vollständige Resultat

$$u' = u'_{\text{linear}} f_1 f_2.$$

Analog geht man bei der Bestimmung von  $M$  für diesen Fall vor. Unter Benützung der gleichen Faktoren  $f_1$  und  $f_2$  ergibt sich

$$M = M_{linear} \frac{1}{f_1 f_2}.$$

Wie erwähnt, wurden die Kurven der Fig. 7 und 8 für Platindrähte bei  $t_a = 20^\circ\text{C}$  berechnet. Der Einfluß einer davon abweichenden Lufttemperatur macht sich erst bei Unterschieden von  $\pm 30^\circ\text{C}$  bemerkbar. Für größere Unterschiede müssen die Kurven mit anderen Werten für  $\alpha_a$  und  $a$  bzw. für  $a/\alpha_a$  neu berechnet werden; desgleichen für Drähte aus anderem Material.

Dagegen ist — wie früher schon betont wurde — bei der Bestimmung von  $I_0$  bei abgestelltem Wind darauf zu achten, daß Druck und Temperatur der Luft am Orte des Hitzdrahtes gleich sind wie bei der Messung im Wind. Wenn dies — wie z. B. bei Messungen in Turbomaschinen — nicht direkt realisierbar ist, dann steht folgender Ausweg offen.

Die Hitzdrahtsonde wird in einen kleinen, druckfesten Ofen gebracht und Druck und (oder) Temperatur im Ofen entsprechend eingestellt. Dabei kann der Hitzdraht selber als Widerstandsthermometer zur Temperaturmessung benützt werden.

Unter Berücksichtigung der *Ähnlichkeitsgesetze* für den Wärmeübergang bei natürlicher Konvektion kann dabei ein Temperaturunterschied durch einen entsprechend geänderten Druck kompensiert werden und umgekehrt. Nur muß noch beachtet werden, daß auch hinsichtlich der Wärmeleitung an den Drahtenden gleiche Bedingungen herrschen.

Nach HÜTTE<sup>1)</sup> gilt für die natürliche Konvektion

$$\frac{\zeta_0 D}{\lambda_m} = f(Gr)$$

(siehe Fig. 11<sup>2)</sup>) mit

$Gr$  = Grashofsche Zahl.

Also

$$\zeta_0 = \frac{\lambda_m}{D} f(Gr)$$

und die Wärmeabgabe durch Konvektion

$$Q = \frac{\lambda_m}{D} f(Gr) \pi D L (t - t_a).$$

Da auch die Endverluste der Differenz  $t - t_a$  proportional sind, müssen für gleichen Wärmebedarf des Hitzdrahtes mit Endverlusten pro Grad Übertemperatur die Übertemperatur  $t - t_a$  und der Wert von  $\lambda_m f(Gr)$  mit und ohne

<sup>1)</sup> HÜTTE, *Des Ingenieurs Taschenbuch*, 1. Bd., 27. Aufl. (Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1941), S. 594.

<sup>2)</sup> HÜTTE, l.c., Tafel 7.

Wind gleich sein. Dann ist die Wärmeabgabe des Drahtes an die ruhende Luft und an die Stützen konstant.

Nun ist für Luft

$$Gr = b_L p^2 D^3 (t - t_a) \sim b_L p^2$$

mit  $p$  = absoluter Luftdruck.

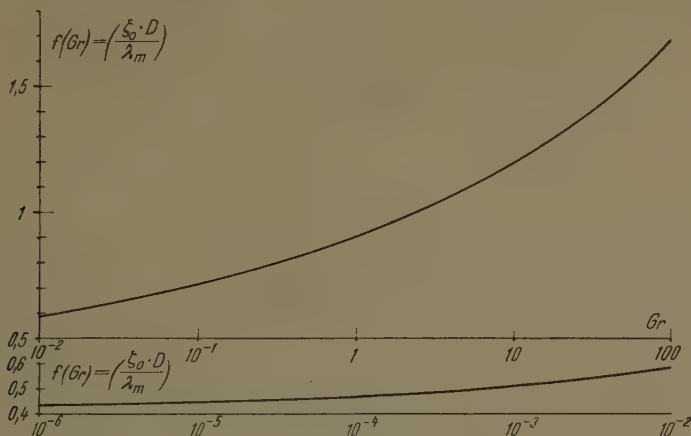


Fig. 11

Der Koeffizient  $b_L$  ist in Fig. 12 aufgetragen<sup>1)</sup> als Funktion der mittleren Temperatur

$$\vartheta = \left( \frac{t - t_a}{\ln \frac{t + 273}{t_a + 273}} - 273 \right),$$

auf die auch  $\lambda_m$  zu beziehen ist.

Es muß also sein

$$\lambda(\vartheta) f[\text{const } b_L(\vartheta) p^2] (t - t_a) = \text{const}$$

$$\text{und } t - t_a = \text{const.}$$

Beispiel:

Für

$$D = 10 \mu \quad t_{a1} = 400^\circ$$

$$p_1 = 1 \text{ ata} \quad (t - t_a)_1 = 100^\circ$$

$$(t - t_a)_2 = 100^\circ \quad t_{a2} = 0^\circ$$

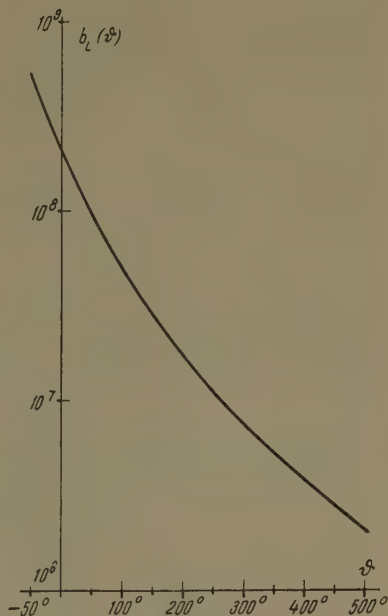


Fig. 12

<sup>1)</sup> HÜTTE, I. c., Tafel 8.



ergibt sich

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &\sim 450^\circ & \lambda(\vartheta_1) &= 1,223 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cal}}{\text{m Grad s}} \\ b_L(\vartheta_1) &= 2,76 \cdot 10^6 & Gr_1 &= 2,76 \cdot 10^{-7} \\ f(Gr_1) &= 0,425\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\vartheta_2 &\sim 48^\circ & \lambda(\vartheta_2) &= 0,6475 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cal}}{\text{m Grad s}} \\ b_L(\vartheta_2) &= 97 \cdot 10^6 & f(Gr_2) &= 0,803 \\ Gr_2 &= 0,32\end{aligned}$$

daraus

$$p_2 = 182 \text{ ata.}$$

Das heißt, daß in ruhender Luft für  $t - t_a = 100^\circ$  bei  $p = 182 \text{ ata}$  und  $t_a = 0^\circ$  der Wärmebedarf eines Hitzdrahtes gleich ist wie bei  $p = 1 \text{ ata}$  und  $t_a = 400^\circ$ .

### Summary

(i) The characteristics of hot-wires are calculated approximately, by using the experimental results of the heat loss of thin cylinders in a cross-stream. They are based upon the similarity law of heat transfer by forced convection.

The approximation lies in that the heat losses at the two ends of such probes are neglected, so that the results apply exactly only to wires of finite length as a part of infinitely long wires.

(ii) Starting from an evaluation formula previously derived, a practical method is developed for determining the sensitivity of hot-wire probes. This method is based upon the complete semi-empirical equation by KING.

From KING's linear equation a simple and universally valid expression for the sensitivity of hot-wires is derived. KING's complete equation differs from the linear one by two correction terms, one of which is neglected as small. Using a result derived from the linear equation, the complete equation and its derivative are linearized. From this corrections are derived which are rather widely valid and which, when applied to the results obtained from the linear equation, lead to the more accurate ones corresponding to KING's complete equation. The measurements necessary to obtain the data for these corrections for a given kind of wire are easily made in still air without forced heat convection.

The relation between pressure and temperature which in air influence the measurements without flow are explained on the basis of experimental results in connection with the similarity law for heat transfer by free convection.

The curves given include the influence of the heating circuit upon the sensitivity and the thermal lag of the hot-wire.

Eingegangen: 29. 11. 49.

## Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable

Cas d'une surcharge uniformément répartie

Par HENRY FAVRE<sup>1)</sup> et ERIC CHABLOZ, Zurich

La flexion des plaques d'épaisseur constante a été l'objet de nombreuses études théoriques depuis le début du XIX<sup>e</sup> siècle et nos connaissances dans ce domaine sont actuellement étendues<sup>2)</sup>. Il n'en est, par contre, pas de même pour les plaques fléchies d'épaisseur variable, qui n'ont été abordées que très récemment par le calcul. Les théoriciens qui se sont occupés de cette question ont surtout porté leurs efforts sur des plaques circulaires où l'épaisseur  $h$  est une certaine fonction non-linéaire de la distance  $r$  d'un point au centre<sup>3)</sup> et sur quelques types de plaques rectangulaires<sup>4)</sup>. Quant à l'étude des plaques circulaires d'épaisseur linéairement variable, elle n'a été entreprise jusqu'à présent que dans le cas particulier où  $h = cr$ ,  $c$  désignant une constante<sup>5)</sup>. C'est pourquoi nous

<sup>1)</sup> Chaire de Mécanique technique, Ecole polytechnique fédérale.

<sup>2)</sup> Voir par exemple S. TIMOSHENKO, *Theory of Plates and Shells* (McGraw-Hill Book Company, New York et Londres, 1940).

<sup>3)</sup> Citons principalement:

H. HOIZER, *Kreisförmige Platten mit veränderlicher Dicke und günstigste Formen solcher Platten*, Z. ges. Turbinenwesen 15, 21 (1918).

L. FÖPPL, *Über eine Analogie zwischen rotierender Scheibe und belasteter Kreisplatte*, Z. angew. Math. Mech. 2, 92 (1922).

O. PICHLER, *Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke*, Thèse de l'Ecole polytechnique de Stuttgart (Springer, Berlin 1928).

R. GRAN OLSSON, *Biegung kreisförmiger Platten von radial veränderlicher Dicke*, Ing. Arch. 8, 31 (1937); et *Unsymmetrische Biegung der Kreisringplatte von quadratisch veränderlicher Steifigkeit*, Ing. Arch. 10, 14 (1939); 11, 259 (1940); 13, 147 (1942/43).

<sup>4)</sup> Citons entre autres:

R. GRAN OLSSON, *Die Biegung der rechteckigen Platte veränderlicher Dicke*, Thèse de l'Ecole polytechnique de Berlin (1933); *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Biegesteifigkeit*, Ing. Arch. 5, 363 (1934); *Biegung der Rechteckplatte von exponentiell veränderlicher Dicke*, Bauingenieur 21, 230 (1940); *Biegung der Rechteckplatte bei linear veränderlicher Steifigkeit und beliebiger Belastung*, Bauingenieur 22, 10 (1941).

E. REISSNER, *Remark on the Theory of Bending of Plates of Variable Thickness*, J. Math. Phys. 6, 43 (1937).

<sup>5)</sup> Voir: D. CONWAY, *The Bending of Symmetrically Loaded Circular Plates of Variable Thickness*, J. appl. Mech. 15, 1 (1948).

H. FAVRE, *Sur un type de plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable*, Bull. techn. Suisse romande 75, nos 18, 19 et 26 (1949).

nous proposons d'examiner ici le cas plus général d'une plaque circulaire où l'épaisseur varie selon la loi  $h = c r + d$ ,  $d$  étant également une constante.

Après avoir établi l'équation différentielle du problème dans le cas d'une surcharge uniformément répartie (§ 1), nous intégrerons cette équation en supposant tout d'abord la plaque encastree le long du contour (§ 2), puis en l'admettant posée (§ 4). Dans les §§ 3 et 5, nous calculerons les déformations et les tensions correspondant à ces deux sortes d'appuis.

### § 1. Equation différentielle des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable

Nous rappellerons tout d'abord quelques formules générales connues. Considérons une plaque circulaire où l'épaisseur  $h$ , la surcharge par unité de surface  $p$  et les conditions d'appuis sont uniquement fonctions de  $r$ . Nous admettrons que l'épaisseur soit petite par rapport aux autres dimensions et que la courbure initiale du feuillet moyen<sup>1)</sup> soit très faible, de façon que les forces intérieures agissant dans cette surface soient négligeables.

Soient  $\zeta_0$ <sup>2)</sup> le déplacement, parallèle à l'axe de la plaque, d'un point du feuillet moyen et

$$\varphi = - \frac{d\zeta_0}{dr} \quad (1)$$

la variation (due à la déformation) de la pente de cette surface. La grandeur  $\varphi$  satisfait à l'équation différentielle du second ordre:

$$D \frac{d}{dr} \left( \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{r} \right) + \frac{dD}{dr} \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = -Q, \quad (2)$$

où  $Q$  désigne l'effort tranchant relatif à l'unité de longueur (fig. 1) et

$$D = \frac{E h^3}{12 (1 - \nu^2)}, \quad (3)$$

$E$  étant le module d'élasticité et  $\nu$  le nombre de POISSON<sup>3)</sup>.

L'intégration de l'équation (2), compte tenu de deux conditions aux limites, permet de déterminer  $\varphi(r)$ . Les moments de flexion  $M_r, M_t$ <sup>4)</sup> et les tensions normales  $\sigma_r, \sigma_t$  peuvent ensuite être calculés à l'aide des formules

<sup>1)</sup> Par « feuillet moyen » nous entendons la surface qui, avant la déformation, a ses points équidistants des deux faces de la plaque.

<sup>2)</sup>  $\zeta_0$ , ainsi que la grandeur  $z$  que nous introduirons plus loin, seront comptés positivement vers le bas, en supposant l'axe de la plaque vertical et la surcharge dirigée vers le bas.

<sup>3)</sup> L'équation (2) a été indiquée pour la première fois par H. HOLZER, il est vrai sous une forme un peu différente. C'est à O. PICHLER que l'on doit la forme dans laquelle nous l'avons écrite. Pour sa démonstration, voir par exemple S. TIMOSHENKO, loc. cit., p. 282 ss.

<sup>4)</sup> Le moment de torsion  $M_{rt} = M_{tr}$  est ici identiquement nul. Il en est de même de l'effort tranchant agissant sur les éléments de surface  $h dr$ .

$$M_r = D \left( \frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right), \quad M_t = D \left( \frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right), \quad (4)$$

$$\sigma_r = \frac{M_r}{h^3/12} z, \quad \sigma_t = \frac{M_t}{h^3/12} z, \quad (5)$$

$z$  désignant la distance d'un point de la plaque au feuillet moyen. En particulier, les valeurs de ces tensions aux points  $z = h/2$  de la face inférieure sont :

$$(\sigma_r)_i = -\frac{6 M_r}{h^2}, \quad (\sigma_t)_i = -\frac{6 M_t}{h^2}, \quad (6)$$

celles aux points correspondants  $z = -h/2$  de la face supérieure sont égales aux valeurs (6) changées de signe.

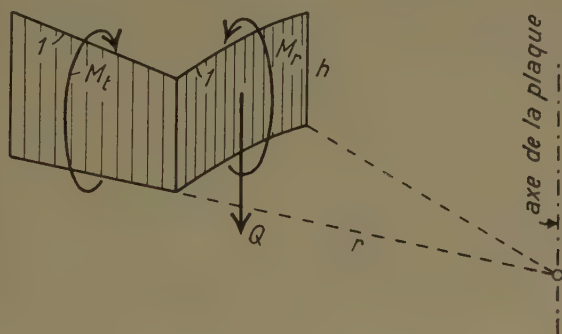


Fig. 1

Enfin, le déplacement  $\xi_0$  s'obtient en intégrant l'équation (1) :

$$\xi_0 = - \int \varphi(r) dr + C, \quad (7)$$

$C$  étant une constante qu'on détermine à l'aide d'une condition aux limites.

Soit maintenant une plaque circulaire de rayon  $a$  et d'épaisseur linéairement variable, soumise à une surcharge uniformément répartie ( $p = \text{const}$ ). On peut supposer, par exemple, que l'une des deux faces de la plaque soit un plan et l'autre la surface d'un cône de révolution dont l'axe coïncide avec celui de la plaque (fig. 2a). Dans ce cas, le feuillet moyen sera lui-même une surface conique et il sera nécessaire, pour que la courbure initiale de cette surface soit très faible et les formules (1) à (7) applicables, que l'épaisseur  $h$  soit elle-même très petite par rapport au rayon  $a$  du contour. On peut aussi supposer que les deux faces de la plaque soient symétriques par rapport à un plan, qui est alors le feuillet moyen (fig. 2b). Dans ce cas, la courbure initiale de ce feuillet est nulle et les formules rappelées plus haut sont applicables dans les meilleures conditions



possibles. On peut d'ailleurs imaginer une infinité de cas intermédiaires pouvant intervenir dans les applications. Les calculs que nous allons faire seront applicables à tous ces cas, mais seront d'autant plus exacts que la courbure du feuillet moyen sera plus faible. Ils ne seront en outre valables que lorsque les déplacements  $\zeta_0$  des points du feuillet moyen pourront être eux-mêmes considérés comme petits par rapport à l'épaisseur  $h$ .

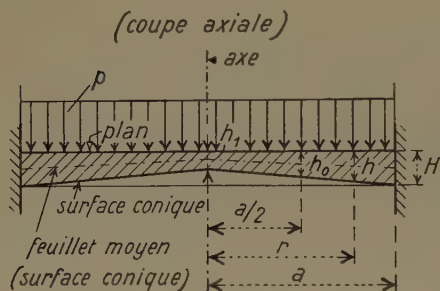


Fig. 2a

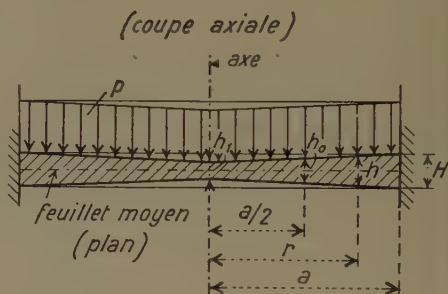


Fig. 2b

Nous pouvons poser (fig. 2a ou 2b)<sup>1)</sup>:

$$h = \left[ 1 + \lambda \left( 2 \frac{r}{a} - 1 \right) \right] h_0, \quad (8)$$

d'où

$$H = (h)_{r=a} = (1 + \lambda) h_0, \quad h_1 = (h)_{r=0} = (1 - \lambda) h_0,$$

$h_0$  désignant la valeur de  $h$  aux points où  $r = a/2$  et  $\lambda$  la variation, divisée par  $h_0$ , que subit l'épaisseur depuis ces points jusqu'au contour.

Posons encore:

$$\xi = \frac{r}{a} \quad (9)$$

et

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (10)$$

L'équation (2) devient, en tenant compte de (3), (8), (9), (10) et en remarquant que

$$Q = \frac{1}{2 \pi r} \int_0^r p (2 \pi r) dr = \frac{pr}{2} :$$

<sup>1)</sup> Ces deux figures ont été dessinées en choisissant une valeur positive de  $\lambda$ . Elles se rapportent au cas des §§ 2 et 3, où la plaque est encastrée le long du contour.

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} + \frac{\varphi}{\xi} \right) = & -\frac{a^3 p}{2D_0} \xi - \lambda \left( a_{11} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + a_{12} \frac{d\varphi}{d\xi} + a_{13} \frac{\varphi}{\xi} \right) \\
 & - \lambda^2 \left( a_{21} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + a_{22} \frac{d\varphi}{d\xi} + a_{23} \frac{\varphi}{\xi} \right) \\
 & - \lambda^3 \left( a_{31} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + a_{32} \frac{d\varphi}{d\xi} + a_{33} \frac{\varphi}{\xi} \right),
 \end{aligned} \quad (11)$$

où

$$\left. \begin{aligned}
 a_{11} &= 6\xi - 3, & a_{12} &= 12 - \frac{3}{\xi}, \\
 a_{21} &= 12\xi^2 - 12\xi + 3, & a_{22} &= 36\xi - 24 + \frac{3}{\xi}, \\
 a_{31} &= 8\xi^3 - 12\xi^2 + 6\xi - 1, & a_{32} &= 32\xi^2 - 36\xi + 12 - \frac{1}{\xi}, \\
 a_{13} &= -6 + 6\nu + \frac{3}{\xi}, \\
 a_{23} &= -12(1-2\nu)\xi + 12(1-\nu) - \frac{3}{\xi}, \\
 a_{33} &= -8(1-3\nu)\xi^2 + 12(1-2\nu)\xi - 6(1-\nu) + \frac{1}{\xi}.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Telle est l'équation différentielle d'une plaque circulaire d'épaisseur linéairement variable et soumise à une surcharge uniformément répartie.

## § 2. Intégration de l'équation (11) dans le cas où la plaque est encastrée le long du contour

Développons  $\varphi$ , qui peut être considéré comme une fonction de  $\xi$  et  $\lambda$ , en une série procédant selon les puissances croissantes de  $\lambda$ :

$$\varphi(\xi, \lambda) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi) \lambda + \varphi_2(\xi) \lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \lambda^i. \quad (13)$$

Pour des valeurs suffisamment petites de  $\lambda$ , il faut s'attendre à ce que cette série converge rapidement, de sorte qu'on pourra se contenter, dans les applications, de ne considérer qu'un petit nombre de ses termes. Ce point sera confirmé plus loin.

Pour déterminer les fonctions  $\varphi_i$ , introduisons la série (13) dans les deux membres de l'équation (11) et identifions les coefficients des mêmes puissances de  $\lambda$ . Nous obtenons ainsi le système d'équations différentielles simultanées:

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda^0: \quad \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \frac{\varphi_0}{\xi} \right) &= - \frac{a^3 p}{2 D_0} \xi, \\
 \lambda^1: \quad \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \frac{\varphi_1}{\xi} \right) &= - \left( a_{11} \frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} + a_{12} \frac{d\varphi_0}{d\xi} + a_{13} \frac{\varphi_0}{\xi} \right), \\
 \lambda^2: \quad \frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\varphi_2}{d\xi} + \frac{\varphi_2}{\xi} \right) &= - \left( a_{11} \frac{d^3 \varphi_1}{d\xi^3} + a_{12} \frac{d^2 \varphi_1}{d\xi^2} + a_{13} \frac{d\varphi_1}{d\xi} + a_{21} \frac{d^2 \varphi_0}{d\xi^2} \right. \\
 &\quad \left. + a_{22} \frac{d\varphi_0}{d\xi} + a_{23} \frac{\varphi_0}{\xi} \right), \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Ces équations sont applicables quelles que soient les conditions aux limites, pourvu que ces dernières ne dépendent que de  $r$ .

Supposons maintenant que la plaque soit *encastree le long du contour*  $r = a$  (fig. 2a et 2b). Les conditions aux limites sont alors:

$$(\varphi)_{r=0} \equiv (\varphi)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (\varphi)_{r=a} \equiv (\varphi)_{\xi=1} = 0. \quad (15)$$

Pour que ces conditions soient satisfaites quel que soit  $\lambda$ , il est nécessaire, d'après (13), que:

$$(\varphi_i)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (\varphi_i)_{\xi=1} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty). \quad (16)$$

Revenons aux équations (14). Nous pouvons intégrer directement la première, qui est une équation d'EULER pour la fonction inconnue  $\varphi_0$ . En tenant compte des conditions  $(\varphi_0)_{\xi=0} = 0$  et  $(\varphi_0)_{\xi=1} = 0$ , nous obtenons par des calculs élémentaires:

$$\varphi_0 = \frac{a^3 p}{16 D_0} (-\xi^3 + \xi). \quad (17)$$

En introduisant cette valeur de  $\varphi_0$  dans la seconde des relations (14), cette dernière devient elle-même une équation d'EULER ne contenant que la fonction inconnue  $\varphi_1$ :

$$\frac{d}{d\xi} \left( \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \frac{\varphi_1}{\xi} \right) = - \frac{a^3 p}{16 D_0} [-6(11 + \nu)\xi^2 + 24\xi + 6(1 + \nu)].$$

La solution de cette équation, compte tenu des conditions  $(\varphi_1)_{\xi=0} = 0$  et  $(\varphi_1)_{\xi=1} = 0$ , est

$$\varphi_1 = \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ \frac{2(11 + \nu)}{5} \xi^4 - 3\xi^3 - 2(1 + \nu)\xi^2 + \frac{3 + 8\nu}{5} \xi \right]. \quad (18)$$

En introduisant les valeurs (17) et (18) de  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  dans la troisième des relations (14), on obtient une nouvelle équation d'EULER permettant, en tenant compte des conditions  $(\varphi_2)_{\xi=0} = 0$  et  $(\varphi_2)_{\xi=1} = 0$ , de déterminer  $\varphi_2$ , et ainsi de suite. En procédant de la sorte, nous avons obtenu:

$$\varphi_2 = \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ -\frac{139 + 20 \nu + \nu^2}{10} \xi^5 + \frac{8(11 + \nu)}{5} \xi^4 - \frac{3(1 - 4\nu - \nu^2)}{2} \xi^3 - \frac{16(1 + 2\nu + \nu^2)}{5} \xi^2 + \frac{5 + 4\nu + 9\nu^2}{5} \xi \right], \quad (19)$$

$$\varphi_3 = \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ \frac{6701 + 1197\nu + 99\nu^2 + 3\nu^3}{175} \xi^6 - \frac{139 + 20\nu + \nu^2}{2} \xi^5 + \frac{169 - 57\nu - 29\nu^2 - 3\nu^3}{5} \xi^4 + \frac{17 + 228\nu + 135\nu^2 + 24\nu^3}{10} \xi^3 - \frac{2(13 + 25\nu + 21\nu^2 + 9\nu^3)}{5} \xi^2 + \frac{159 + 308\nu + 111\nu^2 + 312\nu^3}{175} \xi \right]. \quad (20)$$

Désignons par  $\varphi^{(1)}$ ,  $\varphi^{(2)}$ , ... les approximations successives de la fonction  $\varphi$ , obtenues en ne considérant qu'un terme, deux termes, etc. de la série (13):

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi_0 \quad (1^{\text{re}} \text{ approximation}), \\ \varphi^{(2)} &= \varphi_0 + \varphi_1 \lambda \quad (2^{\text{e}} \text{ approximation}), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

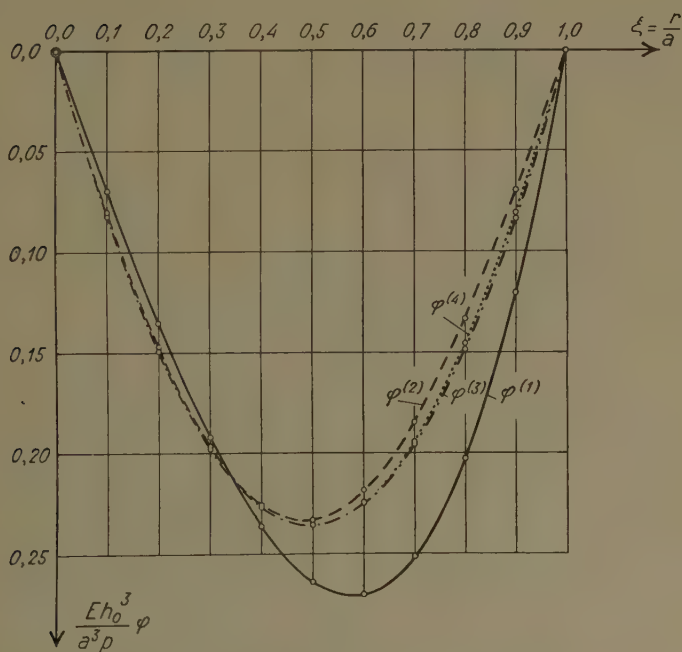


Fig. 3

Plaque circulaire encastree de la fig. 2a ou 2b. Représentation graphique des quatre premières approximations  $\varphi^{(1)}$ , ...,  $\varphi^{(4)}$  en fonction de  $\xi$ , pour  $\nu = 0,25$  et  $\lambda = 0,2$ .



Dans la fig. 3, nous avons représenté graphiquement les valeurs de  $\varphi^{(1)}$ , ...,  $\varphi^{(4)}$  en fonction de  $\xi = r/a$ , calculées pour  $\lambda = 0,2$  et  $\nu = 0,25$ . On voit que la quatrième approximation est à peine discernable de la troisième. D'autres calculs numériques comparatifs<sup>1)</sup> nous ont montré que, pour les valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $-0,4$  et  $+0,4$  (qui sont celles intervenant en général dans les applications), l'erreur de la quatrième approximation est certainement négligeable. Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à obtenir d'autres approximations en prenant un nombre de termes plus grand.

Nous avons ainsi obtenu pour  $\varphi$  la valeur approchée, mais suffisante pour les applications:

$$\varphi(\xi) = \varphi^{(4)} = \varphi_0 + \varphi_1 \lambda + \varphi_2 \lambda^2 + \varphi_3 \lambda^3, \quad (22)$$

où  $\varphi_0$ , ...,  $\varphi_3$  ont les valeurs respectives (17), ..., (20).

### § 3. Calcul des déformations, des moments de flexion et des tensions dans le cas de la plaque encastree

Les relations (4) et (7) s'écrivent, en y remplaçant la variable  $r$  par  $\xi$ :

$$M_r = \frac{D}{a} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} + \nu \frac{\varphi}{\xi} \right), \quad M_t = \frac{D}{a} \left( \frac{\varphi}{\xi} + \nu \frac{d\varphi}{d\xi} \right), \quad (4')$$

$$\zeta_0 = -a \int \varphi(\xi) d\xi + C. \quad (7')$$

En introduisant dans (7') la valeur (22) de  $\varphi(\xi)$  et en tenant compte de la condition  $(\zeta_0)_{\xi=1} = 0$ , qui détermine la constante  $C$ , il nous a été facile de calculer  $\zeta_0$ . De même, en introduisant  $\varphi(\xi)$  dans les relations (4'), nous avons obtenu  $M_r$  et  $M_t$ , puis, à l'aide des formules (6), les valeurs des tensions  $(\sigma_r)_i$  et  $(\sigma_t)_i$  au voisinage de la face inférieure de la plaque.

Pour ne pas alourdir notre exposé, nous avons renoncé à insérer dans ce mémoire les formules obtenues, qui sont très longues et n'offrent qu'un intérêt relatif, et avons préféré donner à l'aide de diagrammes les résultats numériques auxquels elles conduisent. La fig. 4 est une représentation graphique de la fonction  $\zeta_0(\xi)$ , pour les valeurs  $-0,4$ ,  $-0,2$ ,  $\pm 0$ ,  $+0,2$  et  $+0,4$  de  $\lambda$ . Les diagrammes des moments  $M_r$ ,  $M_t$  sont donnés dans la fig. 5 et ceux des tensions  $(\sigma_r)_i$ ,  $(\sigma_t)_i$  dans la fig. 6, pour les mêmes valeurs de  $\lambda$ . Toutes ces courbes ont été calculées en choisissant  $\nu = 0,25$ . Cette valeur du nombre de Poisson est une moyenne entre les valeurs correspondant à l'acier ( $\sim 0,33$ ) et au béton armé ( $\sim 0,15$  à  $0,2$ ). Il faut d'ailleurs s'attendre à ce que toutes les valeurs

<sup>1)</sup> Ces calculs comparatifs ont consisté tout d'abord à déterminer  $\varphi^{(1)}$ , ...,  $\varphi^{(4)}$  également pour  $\lambda = 0,4$ , puis à calculer les valeurs de  $M_r$  et  $M_t$  relatives aux quatre approximations, pour  $\lambda = 0,2$  et  $0,4$ .

calculées dépendent très peu du nombre  $\nu$ , comme c'est en général le cas dans la théorie de l'élasticité.

Remarquons que si  $\lambda$  est positif, l'épaisseur de la plaque est plus faible au voisinage du centre que vers le contour (cas des fig. 2a et 2b). Le contraire a lieu si  $\lambda$  est négatif.

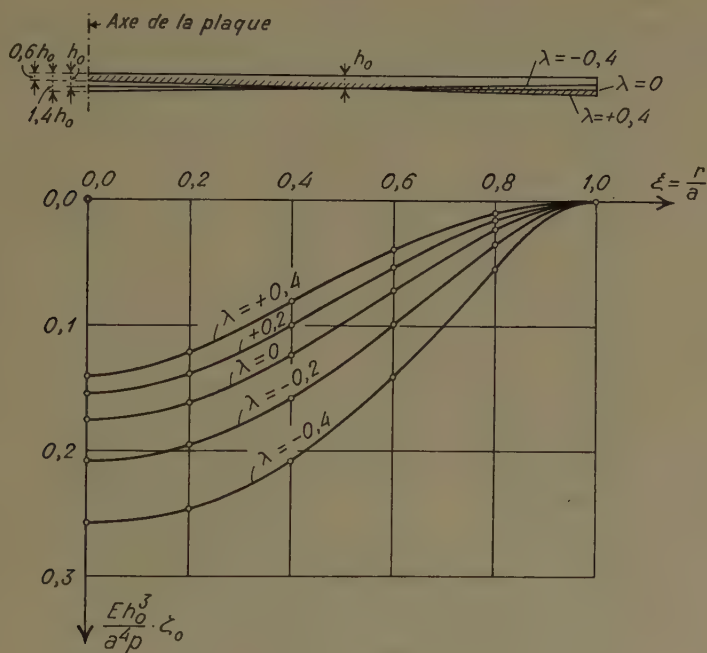


Fig. 4

Plaque circulaire encastree de la fig. 2a ou 2b. Représentation graphique de  $\zeta_0$  en fonction de  $\xi = r/a$  pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

La fig. 4 montre éloquentement que les déformations  $\zeta_0$  sont plus faibles pour les valeurs positives de  $\lambda$  que pour les valeurs négatives. Ceci est très compréhensible, car l'encastrement est d'autant plus efficace que l'épaisseur au voisinage du contour est plus forte. L'influence d'une augmentation de l'épaisseur au bord de la plaque et d'une diminution au centre ( $\lambda > 0$ ) se manifeste également par un accroissement sensible des valeurs absolues de  $M_r$ ,  $M_t$  au voisinage de l'encastrement ( $\xi = 1$ ) et par une diminution de ces valeurs au centre ( $\xi = 0$ ) (fig. 5).

Les diagrammes des tensions normales  $(\sigma_r)_i$  et  $(\sigma_t)_i$  accusent par contre un caractère totalement différent. La fig. 6 montre en effet qu'une augmentation de l'épaisseur au voisinage du contour et une diminution au centre ( $\lambda > 0$ ) ont

pour effet une réduction considérable des valeurs absolues des tensions au bord de la plaque ( $\xi = 1$ ), mais n'ont aucune influence appréciable sur les tensions au centre ( $\xi = 0$ ). Constatons enfin que pour  $\lambda = 0,3$  environ, on réalise cette condition que les valeurs absolues des tensions normales ( $\sigma_r$ ), sont les mêmes au centre qu'au bord ( $\sim 0,5 a^2 p / h_0^2$ ). Cette valeur commune est d'ailleurs beaucoup plus faible que celle relative à l'encastrement dans le cas où l'épaisseur est constante ( $\sim 0,75 a^2 p / h_0^2$ ). On réduit ainsi la tension dangereuse dans le rapport 2:3 en donnant à une plaque circulaire encastree une

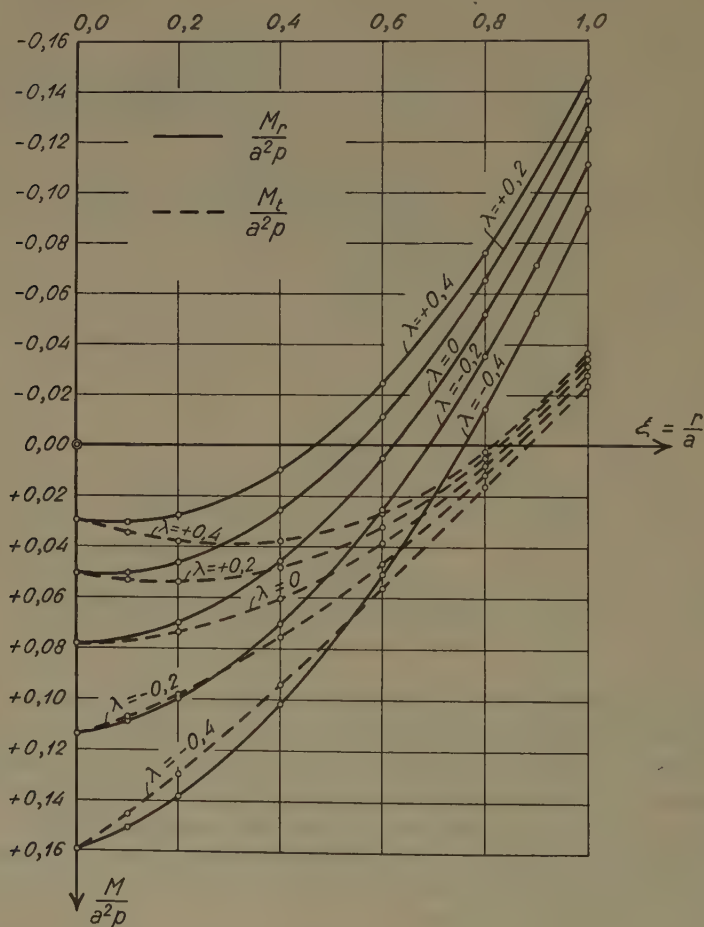


Fig. 5

Plaque circulaire encastree de la fig. 2a ou 2b. Représentation graphique de  $M_r$  et  $M_t$  en fonction de  $\xi = r/a$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

variation linéaire d'épaisseur correspondant à  $\lambda = 0,3$  au lieu de lui donner l'épaisseur constante  $h_0$ . Cette variation d'épaisseur n'entraînant qu'une augmentation de 10% du volume de matière, on voit qu'il y aura en général intérêt à adopter pour la plaque encastree une solution où  $\lambda$  a une valeur *positive*, qu'on choisira pratiquement entre les limites 0,2 et 0,4<sup>1)</sup>.

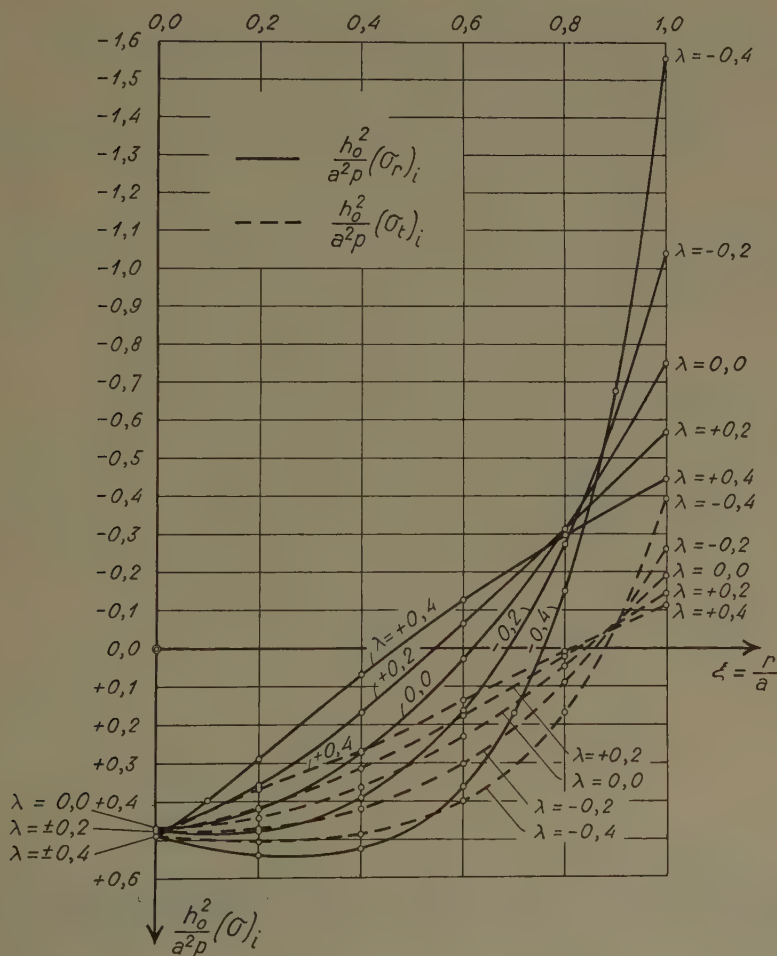


Fig. 6

Plaque circulaire encastree de la fig. 2a ou 2b. Représentation graphique de  $(\sigma_r)_i$  et  $(\sigma_t)_i$  en fonction de  $\xi = r/a$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

<sup>1)</sup> L'un d'entre nous est arrivé à une conclusion analogue pour un autre type de plaque d'épaisseur linéairement variable. Voir H. FAVRE, loc. cit., p. 230.



# § 4. Intégration de l'équation (11) dans le cas où la plaque est posée le long du contour

Les conditions aux limites sont ici (fig. 7a ou 7b)<sup>1)</sup>:

$$(\varphi)_{r=0} \equiv (\varphi)_{\xi=0} = 0 \quad \text{et} \quad (M_r)_{r=a} \equiv (M_r)_{\xi=1} = 0. \quad (23)$$

Posons, comme précédemment:

$$\varphi(\xi, \lambda) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi) \lambda + \varphi_2(\xi) \lambda^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i \lambda^i. \quad (13)$$

Comme nous l'avons vu au § 2, la première des conditions (23) exige que:

$$(\varphi_i)_{\xi=0} = 0. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (24)$$

Remplaçons, d'autre part,  $\varphi$  par le développement (13) dans l'expression (4') du moment de flexion  $M_r$ :

$$M_r = \frac{D}{a} \left( \frac{d\varphi}{d\xi} + \nu \frac{\varphi}{\xi} \right).$$

Nous obtenons, en tenant compte des relations (3), (8), (9) et (10):

$$\begin{aligned} M_r = \frac{D_0}{a} & \left\{ \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + \left[ 3(2\xi - 1) \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right] \lambda \right. \\ & + \left[ 3(2\xi - 1)^2 \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + 3(2\xi - 1) \left( \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_2}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_2}{\xi} \right] \lambda^2 \\ & + \left[ (2\xi - 1)^3 \left( \frac{d\varphi_0}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_0}{\xi} \right) + 3(2\xi - 1)^2 \left( \frac{d\varphi_1}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_1}{\xi} \right) \right. \\ & \left. \left. + 3(2\xi - 1) \left( \frac{d\varphi_2}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_2}{\xi} \right) + \frac{d\varphi_3}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_3}{\xi} \right] \lambda^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

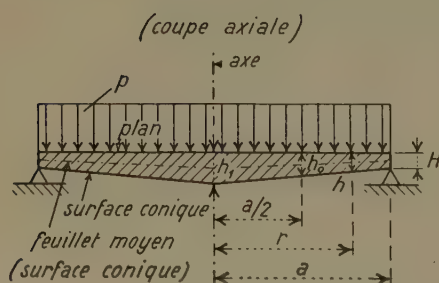


Fig. 7a

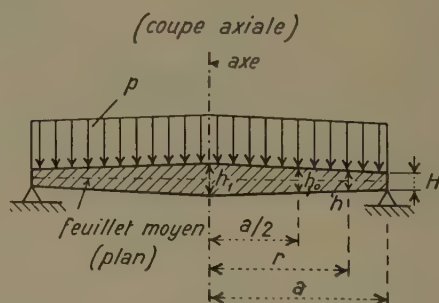


Fig. 7b

<sup>1)</sup> Ces deux figures ont été dessinées en choisissant une valeur négative de  $\lambda$ .

Pour que la seconde des conditions (23) soit satisfaite quel que soit  $\lambda$ , il est nécessaire, d'après l'expression ci-dessus de  $M_r$ , que

$$\left( \frac{d\varphi_i}{d\xi} + \nu \frac{\varphi_i}{\xi} \right)_{\xi=1} = 0. \quad (i = 0, 1, 2, \dots, \infty) \quad (25)$$

Pour déterminer les fonctions  $\varphi_0(\xi)$ ,  $\varphi_1(\xi)$ , ... nous devons donc intégrer le système (14), compte tenu des conditions (24) et (25). En procédant selon la même méthode que celle utilisée au § 2, consistant à intégrer l'une après l'autre les équations (14) en substituant chaque fois les valeurs de  $\varphi_i$  déjà calculées, nous obtenons successivement:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ -\xi^3 + \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \xi \right], \\ \varphi_1 &= \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ \frac{2}{5} (11 + \nu) \xi^4 - 3 \xi^3 - 2 (3 + \nu) \xi^2 + \frac{17 + 35 \nu + 8 \nu^2}{5 (1 + \nu)} \xi \right], \\ \varphi_2 &= \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ -\frac{139 + 20 \nu + \nu^2}{10} \xi^5 + \frac{8}{5} (11 + \nu) \xi^4 + \frac{3}{2} (5 + 6 \nu + \nu^2) \xi^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{16}{5} (4 + 5 \nu + \nu^2) \xi^2 + \frac{11 + 51 \nu + 49 \nu^2 + 9 \nu^3}{5 (1 + \nu)} \xi \right], \\ \varphi_3 &= \frac{a^3 p}{16 D_0} \left[ \frac{6701 + 1197 \nu + 99 \nu^2 + 3 \nu^3}{175} \xi^6 - \frac{1}{2} (139 + 20 \nu + \nu^2) \xi^5 \right. \\ &\quad + \frac{1}{5} (67 - 109 \nu - 35 \nu^2 - 3 \nu^3) \xi^4 \\ &\quad + \frac{1}{10} (323 + 546 \nu + 207 \nu^2 + 24 \nu^3) \xi^3 \\ &\quad - \frac{2}{15} (129 + 273 \nu + 171 \nu^2 + 27 \nu^3) \xi^2 \\ &\quad \left. + \frac{289 + 1377 \nu + 3039 \nu^2 + 1983 \nu^3 + 312 \nu^4}{175 (1 + \nu)} \xi \right]. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Des calculs numériques comparatifs analogues à ceux mentionnés à la fin du § 2 nous ont montré que pour les valeurs de  $\lambda$  comprises entre  $-0,4$  et  $+0,4$  (qui sont celles intervenant en général dans les applications), le degré d'approximation de la fonction définie par les quatre premiers termes de la série (13) est certainement suffisant.

Nous avons ainsi obtenu pour  $\varphi$  la valeur approchée:

$$\varphi(\xi) = \varphi^{(4)} = \varphi_0 + \varphi_1 \lambda + \varphi_2 \lambda^2 + \varphi_3 \lambda^3, \quad (22)$$

où  $\varphi_0, \dots, \varphi_3$  ont maintenant les valeurs (26).

## § 5. Calcul des déformations, des moments de flexion et des tensions dans le cas de la plaque posée

Connaissant  $\varphi(\xi)$ , il nous a été facile de déterminer les déformations  $\zeta_0$ , les moments  $M_r$ ,  $M_t$  et les tensions normales  $(\sigma_r)_i$ ,  $(\sigma_t)_i$ , à l'aide des formules (7'), (4') et (6). Comme dans le cas de la plaque encastree et pour les mêmes raisons que celles invoquées au § 3, nous avons renoncé à insérer dans ce mémoire les formules obtenues et avons préféré donner directement les résultats à l'aide

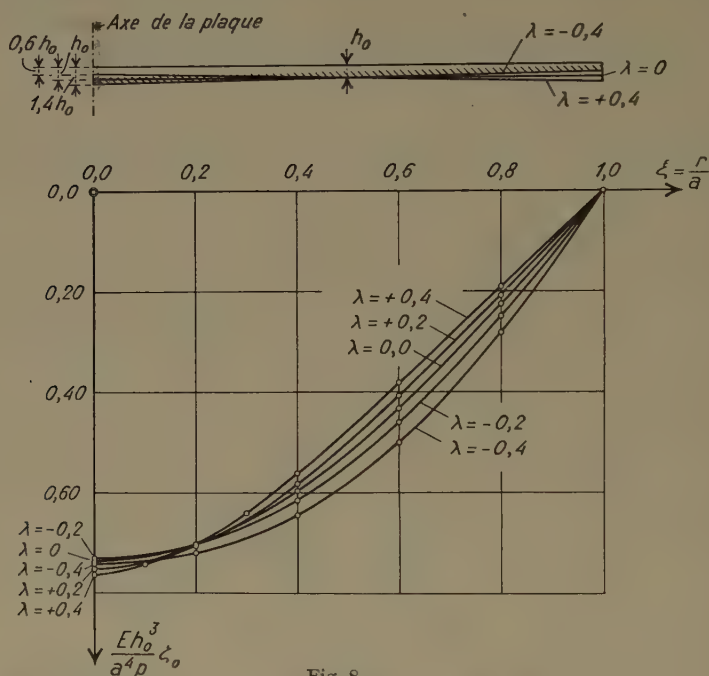


Fig. 8

Plaque circulaire posée de la fig. 7a ou 7b. Représentation graphique de  $\zeta_0$  en fonction de  $\xi = r/a$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

de diagrammes, reproduits dans les fig. 8, 9 et 10, où sont dessinées les courbes relatives aux valeurs  $-0,4$ ,  $-0,2$ ,  $\pm 0$ ,  $+0,2$ ,  $+0,4$  de  $\lambda$  et calculées en choisissant  $\nu = 0,25$ .

La fig. 8 montre que les déformations dépendent très peu de  $\lambda$ . En particulier, la flèche  $f = (\zeta_0)_{\max} = (\zeta_0)_{\xi=0}$  est quasi indépendante de la variation de l'épaisseur.

Les moments de flexion sont par contre fortement influencés par cette variation (fig. 9). Au centre de la plaque ( $\xi = 0$ ),  $M_r$  et  $M_t$  sont égaux, mais leur valeur commune est une fonction de  $\lambda$  qui décroît très rapidement. Au bord ( $\xi = 1$ ), où  $M_r \equiv 0$ , le moment  $M_t$  croît rapidement avec  $\lambda$ .

Comme le montre la fig. 10, les tensions normales sont également fortement influencées par une variation de l'épaisseur de la plaque. Au centre, la valeur commune  $(\sigma_r)_i = (\sigma_t)_i$  est une fonction croissante de  $\lambda$ . Au bord, où  $(\sigma_r)_i \equiv 0$ , la tension  $(\sigma_t)_i$  croît également avec  $\lambda$ . Il est intéressant de constater que c'est

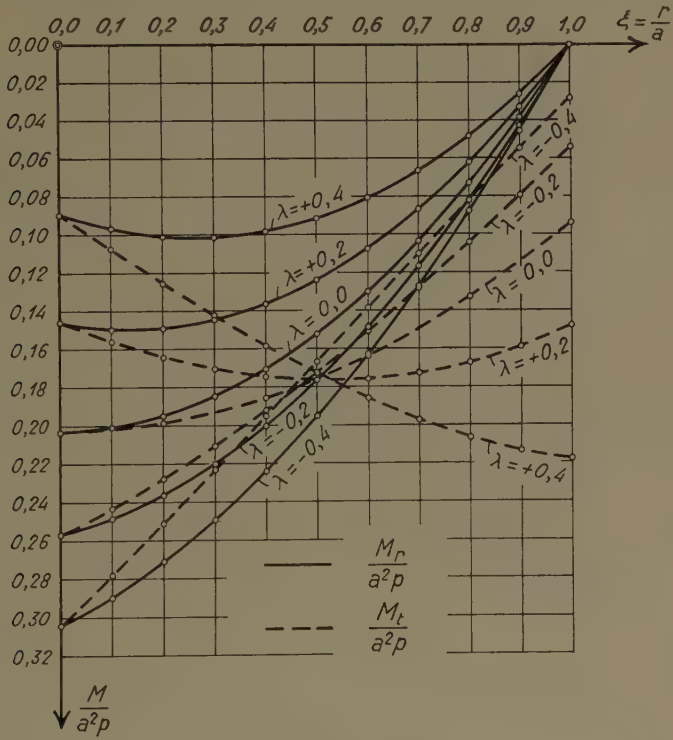


Fig. 9

Plaque circulaire posée de la fig. 7a ou 7b. Représentation graphique de  $M_r$  et  $M_t$  en fonction de  $\xi = r/a$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

dans le cas où  $\lambda = -0,2$  environ que la plus forte tension normale [qui est  $(\sigma_r)_i$  pour  $\xi = 0,275$ ] a la plus petite valeur. Pour  $\lambda = -0,4$ , cette tension a une valeur à peine supérieure. Comme les variations d'épaisseur correspondant à des valeurs négatives de  $\lambda$  entraînent des diminutions du volume de matière, on voit que l'on a en général intérêt, dans le cas envisagé, à construire une plaque où  $\lambda$  a une valeur *négative*, qu'on choisira pratiquement entre les limites  $-0,4$  et  $-0,2$ .

En résumé, dans le cas de la *plaque encastree*, on a intérêt à choisir un profil où  $\lambda$  a une valeur *positive*, comprise entre 0,2 et 0,4 (fig. 2a ou 2b), tandis que dans celui de la *plaque posée*, il est indiqué de prendre un profil où  $\lambda$  a une valeur *négative*, comprise entre  $-0,4$  et  $-0,2$  (fig. 7a ou 7b).



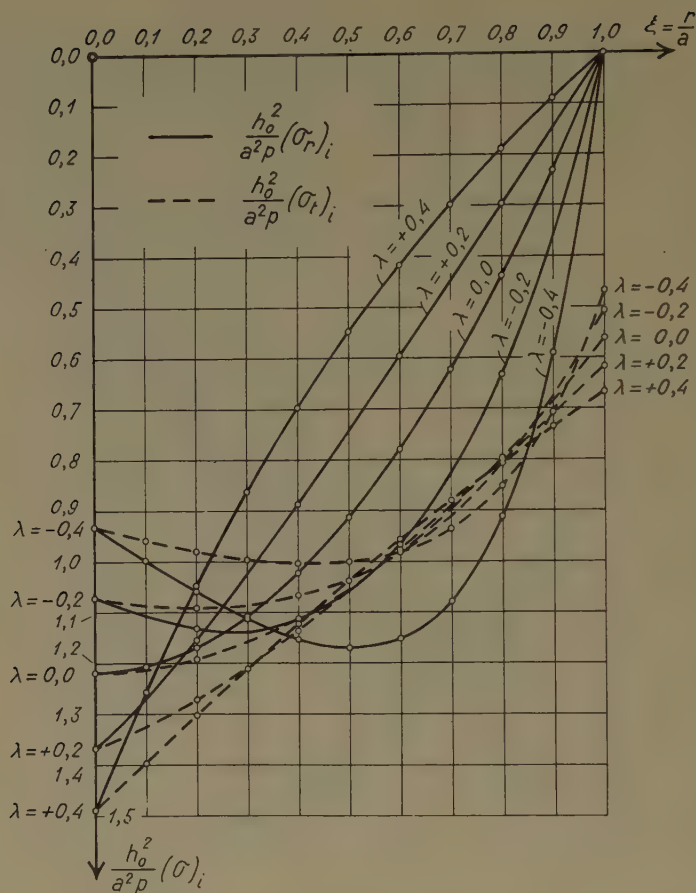


Fig. 10

Plaque circulaire posée de la fig. 7a ou 7b. Représentation graphique  $(\sigma_r)_i$  et  $(\sigma_t)_i$  en fonction de  $\xi = r/a$ , pour différentes valeurs de  $\lambda$  ( $\nu = 0,25$ ).

### Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt für den Fall einer gleichmäßig verteilten Belastung die Biegung der Kreisplatte, deren Dicke von der Mitte bis zum Rande linear variiert. Die bekannte allgemeine Differentialgleichung der rotationssymmetrischen Platte von veränderlicher Dicke, ausgedrückt in Polarkoordinaten, wird integriert für die obigen speziellen Voraussetzungen mit Hilfe einer Reihenentwicklung erstens für die Platte mit eingespanntem Rand und zweitens für die Platte, welche längs des Randes frei aufliegt. In beiden Fällen sind die Resultate vollständig ausgewertet und in Form von Diagrammen für die Durchbiegung, die Biegemomente und die Normalspannungen gegeben.

(Reçu: le 28 3. 1950.)

### Bericht über die internationale Tagung für Halbleiterphysik in Reading vom 10. bis 15. Juli 1950

Die rege Beteiligung aus allen Staaten sowie die große Zahl von fast durchwegs ausgezeichneten Vorträgen bewiesen das starke Bedürfnis nach einer internationalen Besprechung über die Grundfragen der heute sehr intensiven Forschung auf dem Gebiete der Halbleiterphysik.

In einem einführenden Referat lenkte N. F. MOTT (Bristol) die Aufmerksamkeit auf die Hauptprobleme der Halbleiterforschung, nämlich auf die Frage nach der Natur der Störstellen, den Übergang zwischen metallischem und nichtmetallischem Mechanismus der Elektrizitätsleitung, die optischen Eigenschaften und die Struktur der Grenzflächen, deren Aufklärung für das Verständnis des Gleichrichter- und Transistoreffektes von ausschlaggebender Bedeutung ist.

E. J. W. VERWEY (Eindhoven) erinnerte an seine frühere Feststellung, daß in Oxyden erhebliche Leitfähigkeit dann auftritt, wenn verschieden geladene Ionen desselben Elementes an äquivalenten Gitterplätzen sitzen, und gab Möglichkeiten zur Realisierung solcher Kristalle an. In einem weiteren Referat wurden diese Gedanken an Hand der Verbindungen  $(\text{La}, \text{Sr})\text{MnO}_3$  von J. VOLGER (Eindhoven) näher ausgeführt. Dabei wurde Dispersion der scheinbaren Dielektrizitätskonstanten im Gebiet um  $10^3$  Hz beobachtet, die durch Annahme von Korngrenzen mit anderer Leitfähigkeit erklärt werden kann. Natürlich werden dadurch die Verhältnisse wesentlich unübersichtlicher. Hievon unabhängig setzte sich P. H. MILLER (Pennsylvania) kritisch mit der Interpretation der Meßdaten an  $\text{ZnO}$  auseinander. Untersuchungen über die Eigenschaften halbleitender Oxyde, besonders über den Einfluß der stöchiometrischen Verhältnisse, stammen von T. J. GRAY (Bristol).

G. BUSCH (Zürich) bewies an Hand von Messungen der Leitfähigkeit, des Hall-Effektes und der magnetischen Widerstandsänderung, daß die unter  $13^\circ\text{C}$  stabile Modifikation des Zinns (graues Zinn) im Gegensatz zum metallischen weißen Zinn ein Halbleiter ist. Die Eigenschaften sind sehr ähnlich den Eigenschaften von Silizium und Germanium. Die Aktivierungsenergie für die Eigenleitung liegt mit 0,1 eV außerordentlich niedrig.

Über die thermoelektrischen Eigenschaften von Selen berichteten H. K. HENISCH und M. FRANÇOIS (Reading). P. C. BANBURY, H. A. GEBBIE und C. A. HOGARTH (Reading) gelang die Herstellung von PbS-Transistors mit bemerkenswerten Eigenschaften. H. K. HENISCH und J. W. GRANVILLE untersuchten die PbS-Kontakte mit Transistoreigenschaften und fanden viele Ähnlichkeiten mit der Stromspannungscharakteristik bei Germanium.

R. A. SMITH (Telecommunication Research Establishment U. K.) gab eine Übersicht über die elektrischen und optischen Eigenschaften der Sulfide von Blei und Wismut. PbS und PbTe wurden von R. P. CHASMAR und E. H. PUTLEY (Telecommunication Research Establishment U. K.) näher untersucht. Für PbTe ergibt sich eine Aktivierungsenergie von 0,62 eV. R. L. SPROULL und W. W. TYLER (New York) überwandten die großen experimentellen Schwierigkeiten der Herstellung von Bariumoxydeinkristallen. Bariumoxyd verhält sich als Halbleiter mit 3,9 eV Aktivierungsenergie und wird bei der entsprechenden

Grenzwellenlänge des Lichtes photoleitend. H. Y. FAN und M. BECKER (Lafayette) untersuchten die Grenzen des Ultrarot-Durchlässigkeitsbereiches bei Silizium und Germanium. Sie fanden eine ausgesprochene Temperaturabhängigkeit, die sich durch die Temperaturabhängigkeit der Breite des verbotenen Energiebandes erklären läßt.

Die neuen, mit der Transistorwirkung verknüpften, direkten experimentellen Methoden zur Bestimmung der Elektronen- und Löcherbeweglichkeit wurden von W. SHOCKELY (Bell Telephone) zusammengestellt und gegen die bisher üblicheren Leitfähigkeits- und Hall-Effekts-Messungen abgewogen. Über die Bewegung der Ladungsträger in Silberchlorid referierte L. P. SMITH (New York) und über ähnliche Untersuchungen an Alkalihalogeniden R. W. POHL (Göttingen).

K. LARK-HOROVITZ gelang die Erzeugung von bestimmten Störstellendichten durch Nukleonenbombardement sowie auch die Realisierung von  $p$ - $n$ -Grenzen, deren Studium für das Verständnis der Grenzflächeneffekte wichtig ist. Von der chemischen Seite her setzte sich H. KREBS (Bonn) mit der Entstehung der Störstellen auseinander.

G. W. CASTELLAN und F. SEITZ (University of Illinois) (die Arbeit wurde in Abwesenheit der Autoren durch W. SHOCKELY vorgetragen) versuchten die Abhängigkeit der Aktivierungsenergie von der Störstellenkonzentration zu berechnen. Leider kann die Theorie den großen, bei Silizium beobachteten Effekt in ihrer gegenwärtigen Fassung nicht erklären.

Ausführungen von W. H. BRATTAIN (Bell Telephone) über Oberflächenphänomene an Halbleitern vermittelten den Eindruck, daß die «surface states», welche zur Erklärung der Gleichrichter- und Transistorwirkung herangezogen werden müssen, doch eher auf Störstellen an der Oberfläche als auf die früher oft diskutierten Tammzustände zurückzuführen sind. Unter Voraussetzung einer geeigneten Oberflächenschicht entwickelten P. R. AIGRAIN, C. R. DUGAS und H. W. ETZEL (Paris) eine Theorie, welche die Gleichrichter- und Transistoreigenschaften solcher Oberflächen darzustellen vermag. Über experimentelle Studien an Selen-sperrschichtzellen berichtete A. E. SANDSTROEM (Upsala). E. W. J. MITCHELL und J. W. MITCHELL maßen an Germanium mit Hilfe einer sehr weit getriebenen Vakuumtechnik die hohe Austrittsarbeit von 4,77 eV.

Die Tagung stand unter dem Patronat der «International Union of Physics» und wurde durch die Herren Prof. R. W. DITCHBURN, Prof. N. F. MOTT und Dr. H. K. HENISCH in hervorragender Weise organisiert. Während der ganzen Konferenz herrschte eine erfreuliche Atmosphäre von gegenseitigem Verständnis und freundschaftlicher Zusammenarbeit, was wir, besonders heute, nicht als Nebensächlichkeit hinnehmen wollen.

H. Labhart

### Die programmgesteuerte elektromechanische Rechenmaschine der ETH.

Am 14. Juli 1950 wurde im Institut für angewandte Mathematik der Eidgen. Technischen Hochschule, Zürich, eine programmgesteuerte Rechenmaschine in Betrieb gesetzt. Diese wurde von KONRAD ZUSE, Ing. (Neukirchen, Deutschland), als Modell «Z 4», unter Berücksichtigung von Wünschen und Ideen des genannten Instituts, konstruiert und ist das Ergebnis einer längeren Entwicklungsarbeit von ZUSE, der bereits im Jahre 1941 ein programmgesteuertes, im Dualsystem rechnendes Gerät in Betrieb gesetzt hatte.

*Technische Charakterisierung:* Elektromechanisches Gerät mit 2200 Relais, 21 Schrittschaltern und einem mechanischen Speicher für 64 Zahlen. Das Rechenwerk arbeitet im Dualsystem mit gleitendem Komma, Multiplikationszeit 2,5 s (sechsstellig, dezimal). Programmsteuerung durch zwei Lochstreifen, auf die wahlweise und bedingt umgeschaltet werden kann. Eingabe von Zahlen durch Tastatur oder Lochstreifen, Abgabe von Resultaten durch Lochstreifen oder automatisch gesteuerte elektrische Schreibmaschine.

Hervorzuheben ist die einfache und sehr flexible Programmfertigung. Der Lochstreifen für die Befehle kann im Locher der Maschine selbst hergestellt werden, durch Betätigung von Knöpfen, auf welchen die arithmetischen und logischen Operationen angeschrieben sind (Coding Box). Der Speicher arbeitet nach der von Zuse erfundenen, vielversprechenden «Schaltgliedtechnik»; es steht in Aussicht, die Kapazität desselben ohne wesentliche Erhöhung der Platzbeanspruchung auf 1000 Zahlen zu erhöhen. Zur Übernahme dieses Geräts standen Mittel aus Stiftungen der ETH. und der Eidgenössischen Volkswirtschaftsstiftung zur Verfügung.

*E. Stiefel.*

---

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

---

**Fluorescence and Phosphorescence.** By P. PRINGSHEIM (Interscience Publishers, New York 1949). 794 pp., 219 figs.; \$15.—.

Das rund 800 Seiten umfassende Werk beschäftigt sich ausschließlich mit Problemen der Photolumineszenz, d. h. mit dem Studium von Lichtemissionserscheinungen der Materie, die durch die vorhergehende Absorption von Licht angeregt wird.

Das Buch will eine systematische Darstellung des ganzen Gebietes unter Berücksichtigung der neuesten Fortschritte geben. Der Autor hat bewußt darauf verzichtet, auf praktische Anwendungen irgendwelcher Form einzutreten; er widmet sich vielmehr der Aufgabe, die theoretischen und experimentellen Tatsachen vom Standpunkte des Physikers aus darzustellen.

Nach einer sehr knapp gehaltenen Einleitung, die die wichtigsten Grundbegriffe der Theorie und experimentellen Technik enthalten, folgen, in zwei Teile gegliedert, umfassende Beschreibungen der Fluoreszenzeigenschaften von Gasen und festen Körpern.

Entsprechend der allgemeinen Grunddisposition des Werkes findet der Fachmann in den beiden obenerwähnten Teilen wohl eine sehr gründliche und in alle Details gehende Beschreibung des Standes dieser Fachgebiete, wie sie etwa dem Jahre 1946 entspricht. Der Autor hat es auch nicht versäumt, während der langen Zeit der Drucklegung laufend die neu bekanntgewordenen Resultate zu verarbeiten. So sind im Literaturverzeichnis, das ungefähr 2000 Hinweise enthält, Arbeiten bis und mit 1948 aufgenommen.

Ohne Zweifel stellt das von PRINGSHEIM geschaffene Werk ein Handbuch über die Photolumineszenz dar, das auch die Ansprüche des Spezialisten weitgehend zu befriedigen imstande ist. Das Buch kann jedermann, der mit diesem Fachgebiet in Berührung kommt, zur Konsultation aufs wärmste empfohlen werden.

*E. Baumann.*



**Technische Hydraulik.** Von CH. JAEGER (Verlag Birkhäuser, Basel 1949). 480 S., 303 Abb.; sFr. 48.50.

As remarked in the preface of this authoritative volume, the science of hydraulics is so broad in scope that no book on the subject could present in great detail more than a limited portion of the available material. Moreover, any treatise by a single author on so extensive a field is bound to emphasize the particular interests or contributions of the author. While *Technische Hydraulik* is specifically directed at problems encountered in hydroelectric design, it also reflects to a considerable degree the author's predilection for non-uniform flow in open channels and unsteady flow in conduits. Engineers concerned with other phases of technical hydraulics may hence find their treatment comparatively scant. However, this lack of balance has permitted a far more detailed presentation of many obviously important problems than is generally found in a reference work of this nature.

Part A, the shortest of the four main divisions of the book, summarizes in 34 pages the physical bases of hydraulics, including the properties of water and its flow characteristics, the principles of similitude, and the essentials of conduit and open-channel resistance. Part B, on steady motion (138 pages), is further subdivided into sections on the fundamentals of hydrodynamics, the theory of flow in open channels as a function of discharge, energy, and momentum, and the computation of non-uniform flow of a continuous and a discontinuous nature. Part C, on unsteady motion (180 pages), is likewise subdivided into rather extensive sections on pendulation in surge tanks and the theory of water hammer, followed by a short analysis of open-channel waves and surges. Part D, on the movement of groundwater (69 pages), provides a concise survey of the means whereby the DARCY filter law and the DUPUIT theory of non-uniform free-surface flow are applied to steady and unsteady conditions of drainage and pumping. A 23-page appendix presents computational procedures for the evaluation of hydraulic losses and rates of flow, and a second appendix of 14 pages reviews the existing knowledge of bed-load movement and scour.

Except for the previously mentioned unevenness of treatment, the author's organization and presentation of material are excellent. His analytical approach is straightforward, and the numerous line drawings are generally simple and clear. To be regretted is the fact that no subject index but only an index of names is included. To be commended, on the other hand, is the author's style of annotation, wherein not only reference titles but also pertinent biographical data are given for the principal writers cited.

H. Rouse, Iowa.

**Das Polarisationsmikroskop.** Von C. BURRI (Verlag Birkhäuser, Basel 1950), 308 S., 168 Abb.; sFr. 28.80.

Für die Charakterisierung und Diagnose kristalliner Medien spielen optische Daten eine hervorragend wichtige und in vieler Hinsicht einzigartige Rolle. In der Tat lassen sich kristalloptische Untersuchungen an Material der allerverschiedensten Beschaffenheit und Dimensionen erfolgreich durchführen, und es ist darum verständlich, daß das Polarisationsmikroskop zu einem Hauptwerkzeug der Mineralogie und Petrographie geworden ist, darüber hinaus aber auch von allen Forschungsgebieten, in denen es gilt, wie auch immer geartete Kristalle zu erkennen und zu beschreiben. Dem Lernenden bietet die Optik des polarisierten Lichtes und der anisotropen Medien erfahrungsgemäß oft ganz erhebliche Schwierigkeiten. Ihre gründliche Überwindung ist deshalb sehr notwendig, weil das Ar-

beiten mit dem Polarisationsmikroskop nur allzu leicht handwerksmäßig und ohne tieferes Verständnis der grundlegenden Erscheinungen betrieben werden kann. Auch der Praktiker entgeht dieser Gefahr nicht und wird mit Spannung das Werk eines Spezialisten aufnehmen, in der sicheren Voraussetzung, seine theoretischen wie experimentellen Kenntnisse erweitern zu können.

Es kann nun festgestellt werden, daß CONRAD BURRIS Buch *Das Polarisationsmikroskop* beiden oben angedeuteten Leserkreisen in schönster Weise entgegenkommt. Schon die Anlage des Werkes, das, wie im Vorwort hervorgehoben wird, eine vermittelnde Stellung «zwischen den ausgesprochen elementaren Einführungen... und den umfangreichen, von einem großen mathematischen Apparat Gebrauch machenden... Darstellungen» anstrebt, entspricht nach unserer Meinung ganz dem Erwünschten. Fügt man noch hinzu, daß es dem Autor gelungen ist, seinen Plan in sehr klar verständlicher und zugleich präziser Weise zu realisieren, so ist das Werk als in jeder Hinsicht empfehlenswert charakterisiert.

Der Leser, der aus diesem Buch seine grundlegenden Kenntnisse der Kristalloptik erwerben und eine Anleitung zu ihrem praktischen Gebrauch erhalten möchte, wird in den acht Abschnitten des Buches, die sukzessive die Grundbegriffe der Kristalloptik, das Mikroskop, die Untersuchungen im natürlichen Licht, die orthoskopischen Untersuchungsmethoden, die absorbierenden Kristalle, die konoskopischen Untersuchungsmethoden, die Bestimmung der Lichtbrechung nach der Immersionsmethode und die Universaldrehtisch-Methoden behandeln, eine stets sichere, ganz offensichtlich auf langer Erfahrung basierende Führung erhalten. Die bei aller Exaktheit stets durchsichtige und von vorzüglich klaren Figuren unterstützte Darstellung wird ihm dazu verhelfen, selbst Fragen, die bei Anfängern (und nicht nur bei solchen) notorisch zu Verwechslungen Anlaß geben (wir denken zum Beispiel an die Unterscheidung von Wellennormalen- und Strahlenrichtungen), von allem Anfang an richtig zu erfassen.

Für den fortgeschritteneren Leser wird die liebevolle Behandlung mancher Spezialfragen von besonderem Interesse sein. So wird er es sicherlich begrüßen, daß das elliptisch schwingende Licht ausführlicher behandelt wird, als in Büchern dieses Umfangs sonst üblich ist, und mit Gewinn die Theorie der elliptischen Kompensatoren, Halbschattenkeile usw. lesen. Sehr interessant ist auch die Darstellung der Skiodromen gehalten, und wir erinnern uns nicht, eine klarere Illustration der Beerschen Geschwindigkeitskegel gesehen zu haben, als in Figur 89 enthalten ist. Eine einläßliche Diskussion der Auslöschungsverhältnisse in den verschiedenen Kristallsystemen war vom Autor zu erwarten, nachdem dieser das Thema bereits in einer Spezialpublikation behandelt hatte. Überhaupt ist die Berücksichtigung und das Zugänglichmachen wertvoller Spezialabhandlungen der Literatur in erfreulich reichlichem Maße geschehen, was den Wert dieses vorzüglichen Buches nur zu steigern vermag.

Robert L. Parker.

**Practical Spectroscopy.** By G. R. HARRISON, R. C. LORD and J. R. LOOFBOUROW. (Prentice Hall, Inc., New York 1948). 605 pp., 249 figs; \$6.65.

Während in deutscher Sprache seit dem Erscheinen von KAYSERS Standardwerk über Spektroskopie (Band 1, 1900) und von dem der experimentellen Spektroskopie gewidmeten Band 21 des Wien-Harmsschen Handbuchs (1927) keine ausführliche Monographie über dieses Gebiet erschienen ist, liegen in englischer Sprache zwei neuere Monographien vor: «Experimental Spectroscopy» von R. A. SAWYER (Prentice Hall, 1944) und das hier zu besprechende Buch. Ein weiteres, im Verlag A. Hilger (London 1949) erschienen Buch von C. CANDLER, ebenfalls mit dem Titel *Practical Spectroscopy*, ist eine sehr nützliche Instruktion

für alle diejenigen, die mit Hilger-Instrumenten arbeiten, erhebt aber keinen Anspruch auf eine wissenschaftliche Monographie.

Ein Vergleich der beiden amerikanischen Monographien drängt sich von selbst auf. SAWYER legt das Schwergewicht auf Konstruktion und Gebrauch von Prismen- und Gitterspektrographen, wobei er sich in erster Linie an Physiker und Astrophysiker wendet. Die drei Verfasser der *Practical Spectroscopy*, ein Physiker (G. R. H.), ein Chemiker (R. C. L.) und ein Biophysiker (J. R. L.) dagegen bezwecken, ihre drei verschiedenen Gesichtspunkte gemeinsam zur Darstellung zu bringen und so einem größeren Kreis von spektroskopisch arbeitenden Wissenschaftlern zu dienen. Daß diese schwierige Aufgabe — um es gleich vorwegzunehmen — fast durchwegs in recht befriedigender Weise gelöst worden ist, dafür bürgen schon die Namen der Verfasser und ihre Arbeitsstätte: The Massachusetts Institute of Technology.

Die Bewältigung des großen Stoffes wird folgendermaßen vorgenommen. Die ersten neun Kapitel (227 Seiten) behandeln Technik und Gebrauch von Prismen- und Gitterspektrographen unter Vermeidung der in der Monographie von SAWYER ausführlich besprochenen theoretischen Grundlagen. Die folgenden zwei Kapitel (70 Seiten) über Entstehung von Atom- und Molekülspektren hätten wohl besser ganz weggelassen werden können zugunsten einer etwas breiteren Darstellung zum Beispiel der sehr knapp ausgefallenen Infrarotspektroskopie. Ausführlich werden in den nächsten drei Kapiteln (124 Seiten) Fragen der Intensitätsmessung und der Photometrie behandelt, wobei im Hinblick auf Chemiker und Biophysiker der Absorptions-Spektralphotometrie besondere Aufmerksamkeit geschenkt wird. [Eine kleine Bemerkung: Das auf Seite 373 erwähnte und für Orientierungsversuche empfohlene Baly-Rohr leistet häufig auch bei exakten Absorptionsuntersuchungen unschätzbare Dienste, allerdings nicht in der in Fig. 14.2 (a) dargestellten, veralteten Ausführung mit Gummimanschetten (statt mit Schliffen)]. Zwei weitere Kapitel (47 Seiten) sind der qualitativen und quantitativen Emissions-spektralanalyse gewidmet. Die letzten vier Kapitel (100 Seiten) endlich vermitteln einen guten Überblick über die großen Gebiete der Infrarot-, Raman-, Vakuum- und Interferenz-Spektroskopie, über die aus neuerer Zeit ausführliche Sonderdarstellungen vorliegen. Im Kapitel über Infrarotspektroskopie wäre vielleicht ein kurzer Hinweis auf die interessanten neuen Methoden von SUTHERLAND und von THOMPSON zur Sichtbarmachung von Infrarotspektren im Kathodenstrahl-oszillographen am Platz gewesen.

Zahlreiche Figuren und Tabellen sowie umfangreiche Literaturangaben erhöhen den Wert des Buches beträchtlich. Abbildungen und kurze Besprechungen der wichtigsten neuen Typen von Spektralapparaten und zugehörigen Hilfsgeräten, vornehmlich amerikanischer und englischer Herkunft, werden vor allem dem Praktiker von großem Nutzen sein.

K. Wieland.





## Universal Kathodenstrahl- oszillograph

Besonders geeignet für Stoßprüfanlagen und Untersuchungen von Abschaltvorgängen usw.

Eingebaute Hochspannungsanlage für 15, 25, 35 und 45 kV. Eingebaute Null-Linienverschiebung.

Empfindlichkeit in V/mm:

für die Zeitachse:  $0,55 \times$  Anodenspannung in kV;

für die Meßspannung:  $0,44 \times$  Anodenspannung in kV.

Strichscharfe: 0,03–0,3 mm, log. Zeitablenkung  $1\mu\text{s}$ – $1000\mu\text{s}$  lin. Zeitablenkung  $1000\mu\text{s}$ –1 s, einmalig und wiederholt.

Einschwingzeit:  $0,2\mu\text{s}$ ; Registrierformat  $6 \times 6$  cm;

Registriervermögen: 10–15 Perioden pro mm.

Schreibgeschwindigkeit 5000 km/s.

## Trüb, Täuber & Co. AG.

Fabrik elektr. Meßinstrumente und wissenschaftlicher Apparate  
ZÜRICH

*Neuerscheinung September 1950 • Verlag Birkhäuser Basel*

Dr. W. MICHAEL

wiss. Adjunkt des Eidg. Patentamtes in Bern

## Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene

*96 Seiten mit 37 Figuren. In Ganzleinen Fr. 11,50*

Inhalt: Punkt, Gerade und Kreis – Einige allgemeine Sätze der Ortskurvengeometrie – Die Kegelschnitte – Die bizirkuläre Quartik – Die zirkuläre Kubik – Das Kriterium der Zirkularität – Weitere Beispiele für zirkuläre und nicht zirkuläre Kurven – Fußpunktskurven

Aufgabe der Ortskurvengeometrie ist, aus der vektoriellen Gleichung die charakteristischen Merkmale und Konstruktionselemente einer Ortskurve zu bestimmen, die eine exakte Konstruktion der Kurve mit einer beschränkten Anzahl von Punkten ermöglichen.

## Physiker und Mathematiker

Doktorgrad, Deutscher, anerkannter Entwicklungsfachmann und Spezialist mit 20jähriger Erfahrung in bedeutenden Großfirmen der optischen Industrie, sucht sich außerhalb Deutschlands zu verändern. Angebote erbeten an Chiffre BM 555, Verlag Birkhäuser AG, Basel 10.

# Werke der reinen und angewandten Mathematik und Physik

## Mathematik

- BIEBERBACH, L.: Theorie der geometrischen Konstruktionen, erscheint 1951  
 CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie in zwei Bänden Band I geb. Fr. 36.—  
 Band II geb. Fr. 24.50  
 CARATHÉODORY, C.: Maß und Integral und ihre Algebraisierung, erscheint 1950.  
 DOETSCH, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen  
 Grundlagen der Laplace-Transformation . . . . . geb. Fr. 78.—  
 FUETER, R.: Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes . . . geb. Fr. 22.50  
 HURWITZ, A.: Mathematische Werke, 2 Bände . . . . . geb. je Fr. 44.—  
 LINDER, A.: Statistische Methoden für Naturwissenschaftler, Mediziner und In-  
 genieure . . . . . geb. Fr. 18.50  
 LOCHER-ERNST, L.: Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre An-  
 wendung . . . . . geb. Fr. 48.—  
 OSTROWSKI, A.: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band I  
 (Band II 1950, Band III 1951) . . . . . geb. Fr. 47.50  
 SCHLÄFLI, L.: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Band I . . geb. Fr. 54.—  
 STIEFEL, E.: Lehrbuch der darstellenden Geometrie . . . . . geb. Fr. 23.50  
 VOELKER, D., und DOETSCH, G.: Die zweidimensionale Laplace-Transformation,  
 geb. Fr. 43.—  
 ZWINGGI, E.: Versicherungsmathematik . . . . . geb. Fr. 27.—

## Physik und Astronomie

- GOMBÁS, P.: Theorie und Lösungsmethoden des Mehrteilchenproblems der Wellen-  
 mechanik . . . . . geb. Fr. 29.50  
 NIETHAMMER, TH.: Die genauen Methoden der astronomisch-geographischen Orts-  
 bestimmung. . . . . geb. Fr. 32.—  
 VON DER PAHLEN, E.: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen geb. Fr. 36.—  
 WALDMEIER, M.: Einführung in die Astrophysik . . . . . geb. Fr. 47.50  
 WALDMEIER, M.: Tabellen zur heliographischen Ortsbestimmung geb. Fr. 14.—  
 WALDMEIER, M.: Die Sonnencorona, Band I, erscheint 1950  
 Kongreßbericht der Internationalen Konferenz über Kernphysik und theoretische  
 Physik, Basel 1949. 248 S. mit vielen Illustrationen. Broschiert Fr. 16.—

## Ingenieurwissenschaften

- BODEA, E.: Giorgis rationales MKS-Maßsystem. Broschiert . . . . Fr. 24.50  
 BRÄNDLI, H.: Theorie des Mehrfachschusses . . . . . geb. Fr. 28.50  
 JAEGER, CH.: Technische Hydraulik . . . . . geb. Fr. 48.50  
 KUHLMANN, K.: Theoretische Elektrotechnik. Band II: Grundzüge der Theorie der  
 Wechselströme und des einphasigen Transformators . . . . . geb. Fr. 26.50  
 Band III: Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen. In Vorbereitung  
 MEISSNER, E., und ZIEGLER, H.: Mechanik. Band I: Statik der starren, flüssigen und  
 elastischen Körper . . . . . geb. Fr. 36.—  
 Band II: Dynamik der starren Körper . . . . . geb. Fr. 32.50  
 Band III: Dynamik der Systeme, erscheint 1950  
 MICHAEL, W.: Ortskurvengeometrie in der komplexen Zahlenebene, ersch. 1950  
 SÄNGER, R.: Ballistische Störungstheorie . . . . . geb. Fr. 14.50  
 STÜSSI, R.: Vorlesungen über Baustatik, Band I . . . . . geb. Fr. 38.50  
 RUSTERHOLZ, A.: Elektronenoptik, Band I: Grundzüge der theoretischen Elektronen-  
 optik . . . . . geb. Fr. 29.—

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

VERLAG BIRKHÄUSER BASEL



## Neuerscheinung

Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften

Mathematische Reihe – Bände VIII und IX

---

CONSTANTIN CARATHÉODORY

weiland Professor der Mathematik an der Universität München

# FUNKTIONENTHEORIE

in zwei Bänden

*Band I: 288 Seiten mit 33 Figuren. In Ganzleinen Fr. 36.–, broschiert Fr. 32.–*

*Band II: 194 Seiten mit 73 Figuren. In Ganzleinen Fr. 24.50, broschiert Fr. 20.50*

Dieses neueste Werk des kürzlich verstorbenen großen Meisters der Funktionentheorie stellt eine außerordentlich wertvolle Bereicherung der mathematischen Lehrbuchliteratur dar. Die vielfältigen Erfahrungen, die der Verfasser als Forscher und Lehrer während eines langen, erfolgreichen Lebens sammeln konnte, sind hier in vollstem Maße zur Geltung gekommen und haben dem Werk in der Wahl des Stoffes und der Darstellung ein originelles und eigenwilliges Gepräge gegeben. Carathéodorys Buch wendet sich in erster Linie an den Studenten, verlangt deshalb besonders in den späteren Teilen eifrige Mitarbeit, eignet sich daher vor allem als Lektüre neben einer modernen Vorlesung und bietet schließlich auch dem Kenner sachlich und methodisch manches Neue. Der erste Band beginnt mit einer ausführlichen Darstellung der Kreisgeometrie und bringt im wesentlichen den klassischen Bestand der Theorie, während im zweiten Band auch die modernen Zweige behandelt werden, an deren Entwicklung der Verfasser selbst maßgeblich beteiligt war. Besonders betont ist die von Carathéodory stets gepflegte und geschätzte geometrische Denkweise, und so gruppiert sich überhaupt der ganze Stoff der Idee nach um die beiden Namen Schwarz und Riemann. Die Weierstraßsche Richtung mußte demgemäß beiseite gelassen bleiben. Konsequenter wird der äußerst fruchtbare Begriff der normalen Familien benutzt. Zahlreiche Figuren erhöhen die Verständlichkeit des Textes. So wird das Erscheinen dieses schönen Werkes von den Mathematikern und allen denen, welche die Funktionentheorie als Hilfsmittel bei ihrer Arbeit benötigen, auf das freudigste begrüßt werden.

*Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung*

Verlangen Sie bitte den ausführlichen Spezialprospekt sowie unsern neuen wissenschaftlichen Verlagskatalog

VERLAG BIRKHÄUSER · BASEL (Schweiz)

*clichés*  
in jeder Technik



**SCHWITTER**  
**A-G**  
BASEL / ZÜRICH